<36602168720019
<36602168720019
Bayer. Staatsbibliothek

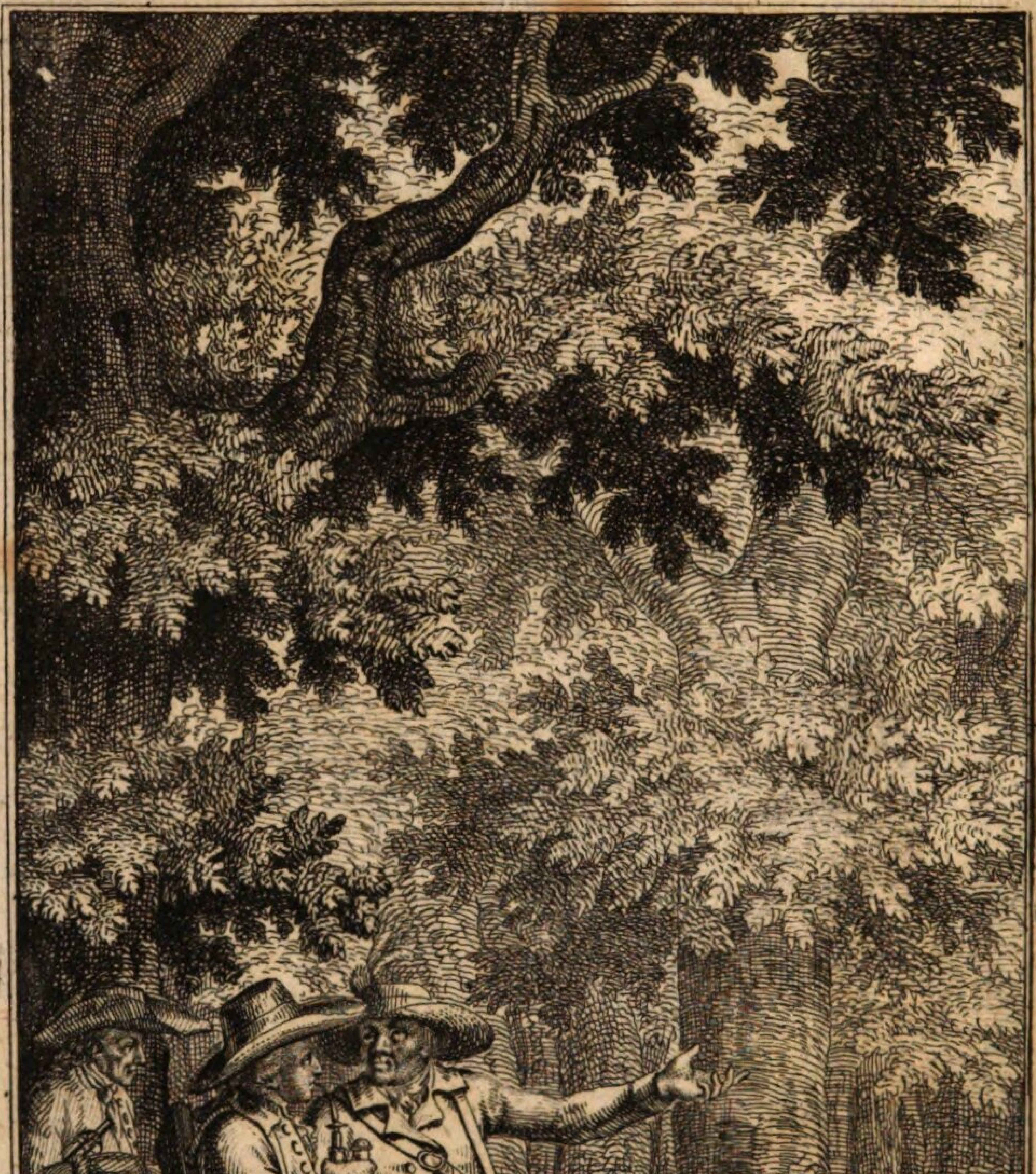
104 H - 8.

Oec. 1156

Oeconomia. Silvarum cultura singul. region. 357.

~~Oec. agr. N. 604.~~

R



Lehrbuch
für die pfalzbaieriſchen Förſter.

Erſter Theil,

welcher die Anfangsgründe der Rechenkunſt und Meßkunſt enthält, ſammt 7 Kupferplatten.

Auf kurfürſtl. höchſten Befehl abgefaßt

von

Georg Grünberger,

kurfürſtl. Cenſurrathe und Profeſſorn der Mathematik in der herzogl. marianiſchen Landesakademie.

Mit kurfürſtlicher gnädigſter Freyheit.

München, bey Johann Baptiſt Strobl 1788.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Wir

Karl Theodor

von Gottes Gnaden Pfalzgraf bey Rhein, Herzog in Ober- und Niederbaiern, des heil. röm. Reichs Erztruchſeß und Churfürſt, zu Gülich, Cleve und Berg Herzog ꝛc. ꝛc.

Bekennen öffentlich mit dieſem Briefe, und thun Jedermann kund, daß Uns unſer lieber getreuer der hieſige Profeſſor und Buchhändler Johann Baptiſt Strobl unterthänigſt gebetten habe, ihm auf das Lehrbuch für die pfalz-baieriſchen Förſter, auf Unſern höchſten Befehl entworfen, drey Bände, ein gnä-

digſtes Privilegium des Inhalts zu ertheilen, daß daſſelbe in Unſern ſämmtlichen churpfalzbaieriſchen und andern Landen niemand ohne ſeine Einwilligung nachdrucken, oder die außer gedachten Unſern Landen verfertigten Abdrücke inner denſelben verkaufen dürfe.

Da Wir nun erwähnte Bitte huldreicheſt gewähret, und berührten Johann Baptiſt Strobl die beſondere höchſte Gnade gethan haben, daß ſelber beſagtes Lehrbuch durch öffentlichen Druck bekannt machen, und zehen Jahre lang in Unſern Chur- und andern Landen ausſchließungsweiſe verkaufen laſſen möge: ſo gebiethen wir hiemit allen und jeden Obrigkeiten und Beamten ernſtgemeſſenſt, keinem in Unſern Landen angeſeſſenen Buchhändler, Buchdrucker und Buchbinder zu geſtatten, daß ſie, oder wer anderer ofterwähntes Buch binnen den gnädigſt verwilligten zehen Jahren in keinerley Format, weder ganz noch auszugsweiſe, ohne deſſen Einwilligung nachdrucken oder nachdrucken laſſen, und verkaufen,

noch

noch weniger aber die in Auslanden gemachten Abdrücke hereinbringen und verhandeln mögen, und dieſes bey Vermeidung Unſrer höchſten Ungnade, und einer Geldſtrafe von hundert Dukaten, wovon die eine Hälfte Unſerm Aerario, die andere hingegen obengenanntem Verleger Johann Baptiſt Strobl zufallen ſoll; wie auch bey Verluſt des verpönten oder fremden Nachdrucks, den wiederholter Verleger entweder ſelbſt oder durch deſſen Anwald oder Ceſſionarium, wo er oder ſie dergleichen finden werden, mit Hilfe und Zuthun eines jeden Ortes Obrigkeit nicht nur wegnehmen laſſen, ſondern auch von jeder Obrigkeit und jedem Beamten mit Vorweiſung des mildeſt ertheilten Privilegii excluſivi die Beytreibung der verwirkten Geldſtrafe von hundert Dukaten fodern darf; wozu ihm auch oder denſelben ſchleunigſt, folglich ohne prozeſſualiſche Weitläufigkeit und ſummariſſime zu verhelfen iſt. Damit ſich aber niemand mit der Unwiſſenheit entſchuldigen möge, ſo iſt auch Unſer weiterer gnädigſter Wille und Befehl, daß

dieſes

dieſes Privilegium ofterwähnten Lehrbuchs für die pfalzbaierischen Förſter zu jedermanns Wiſſenſchaft und Warnung wörtlich vorgedruckt werden ſolle. Gegeben in Unſrer churfürſtlichen Haupt- und Reſidenzſtat München den 3ten Dezember 1787.

Carl Theodor Churfürſt.

Vt. Freyherr von Kreitmayr.

Ad Mandatum ſereniſſimi Domini
& Electoris proprium.

G. G. von Dumhof.

Privilegium impreſſorium
für den hieſigen Profeſſor und Buchhändler
Strobl.

Vor-

Vorrede.

Wenn man die Menge des Brennholzes überſchlägt, welches wir zur Feuerung nöthig haben, ferner die Quantitäten Holzes, welches beym Bergbaue, das Kohlholz, welches beym Hüttenweſen, und von Feuerarbeitern verbraucht wird, was bey Salzſiedereyen, Glashütten, Kalch- und Ziegelöfen, Bräuereyen, beym Häuſerbaue, beſonders auf dem

Lande

Lande, dem Strom- und Brückenbau, dem Maſchinenweſen, zu Deicheln für Waſſerleitungen ꝛc. nöthig iſt, was davon die Schneidemühlen, die Böttger, Wagner, Tiſchler, Drechsler ꝛc. bedürfen, nichts zu ſagen von dem zu häufigen Verbrauch zu Zaunholz ꝛc.; wenn man überdieß die Nutzungen der Borke, des Harzes, Pechs, Theers, der Maaſt, und im Falle daß Ueberfluß da wäre, den möglichen vortheilhaften Holzhandel in benachbarte holzbedürftige Länder zu Waſſer ꝛc. überlegt: ſo wird man die ungeheure Größe der Holzkonſumtion, die Unentbehrlichkeit des Holzes, die Vortheile des Holzhandels, alſo die Wichtigkeit des Forſtweſens und der Holzkultur leicht einſehen. Aber wenn die Konſumtion des Brennholzes beſonders in Städten, und der Preis deſſelben immer

mer ſteigen, der Mangel am tüchtigen Bauholz zunimt, mehrere Hütten- und Hammerwerke aus dem Abgange des benöthigten Kohlholzes eingehen müſſen, groſſe, weitläuftige Förſte durch gar keine, oder unordentliche Wirthſchaft in Verfall gerathen, die Anzahl der Holzwieſen ſich vermehrt, der Boden wegen des gewöhnlichen Ausleuchtens an den meiſten Orten verangert, alles der Natur allein überlaſſen wird, keine Saaten geſchehen, keine oder doch wenige Förſte in ordentliche Gehaue gelegt ſind, wenn durch Monopoliſten beſonders die an Flüſſen gelegenen Förſte zu Schaden gehen rc. dann iſt es Zeit auf Ordnung im Forſtweſen zu denken, und dieſelbe unnachläßlich handzuhaben. Meiſtens hat die Noth allein noch zuletzt Ordnung eingeführt. Weil ich die nöthige Lokalkenntniſſe von unſern Waldun-

dungen, und Förſten nicht beſitze, ſo kann ich von ihrer Beſchaffenheit nichts ſagen. Aber da die kurfürſtliche Hofkammer ſeit einigen Jahren ſowohl auf die Ausmeſſung ihrer Waldungen als eine genaue Prüfung und Auswahl ihrer Förſter dringt, ſo iſt kein Zweifel, daß man nicht nur die Wichtigkeit der Waldungen allein, ſondern auch jene des Unterrichts der denſelben vorgeſetzten Förſter eingeſehen habe. Daß die Mathematik für die Forſtwiſſenſchaft eine unentbehrliche Hülfswiſſenſchaft ſey, iſt ſelbſt die Meinung forſtverſtändiger geſchickter Praktiker, und bedarf bey denjenigen keines Beweiſes, die nur etwas weniges von der Forſtwirthſchaft verſtehen. Da ich dieſes Lehrbuch auf höchſten Befehl Seiner kurfürſtlichen Durchlaucht für die pfalzbaieriſchen Förſter ſchrieb, ſo kann es nur das Nöthigſte und Brauchbarſte für die-

ſelben.

ſelben, und für Anfänger überhaupts enthalten. Ich habe bey deſſen Verfertigung das, was Herr Hofrath Käſtner in der Vorrede zu Florencourt ſagt: (In die Ausübung mathematiſcher Lehren wird ſich ſchwerlich jemand allemal gehörig finden, der nicht Nachdenken genug gehabt hat, die Gründe von ihnen einzuſehen) immer wohl vor den Augen gehabt, und deßwegen die Beweiſe überall mit angegeben. Wer ſich aber etwas zu machen getraut, ohne die Gründe auf denen die Ausübung beruht, zu verſtehen, der darf ſich nur mit den Auflöſungen, welche die Vorſchriften zum Machen enthalten, beruhigen. Ich bin in den theoretiſchen Sätzen meiſtens den Euklideiſchen, und Käſtneriſchen Beweiſen gefolgt, für das Praktiſche aber habe ich das Nöthigſte

aus dem vortreflichen Werke des Herrn Profeſſors Meyers, aus Vierenklee, Oettelt ꝛc. ausgehoben, und ſo kurz als möglich vorgetragen. Ich war zwar anfangs ſchlüßig wenigſtens die erſten Gründe der Trigonometrie dem Lehrbuche noch beyzufügen. Allein der enge Raum hinderte mich hieran. Indeſſen hoffe ich, daß diejenigen, welche alles das, was ich hierinn vortrage, gehörig verſtehen, mit den gewöhnlichen Sätzen der Trigonometrie eben nicht viele Mühe mehr haben ſollen. Die für das Forſtweſen ſo wichtige Aufgabe von der Eintheilung in Gehaue habe ich mich ſo deutlich und vollſtändig, als mir möglich war, auseinander zu ſetzen bemüht, und habe zu dieſem Ende auch die von Oppeliſche hieher gehörige Rechnungsaufgabe noch beygefügt. Die Zugabe §. 203 der Rechenkunſt iſt

daher

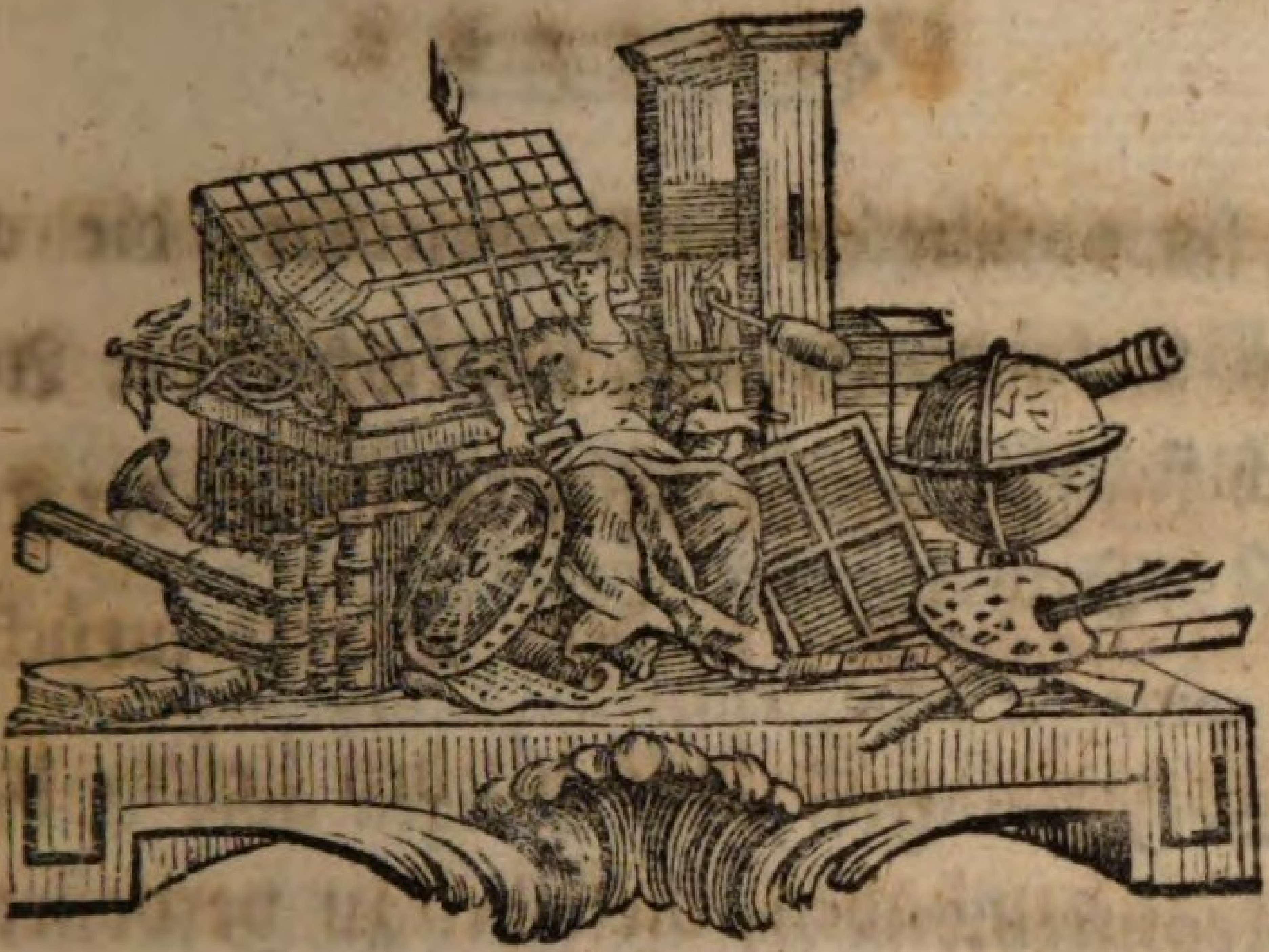
daher entſtanden, weil ich mir anfangs dadurch einige Verkürzung in den Beweiſen der Körpermeſſung verſprach, die ich aber alsdenn erſt, als ich ſchon alles geſchrieben hatte, vermißte. Indeſſen nehme ich mit la Caille doch nicht an, daß ein Körper aus einer Menge übereinander liegender Flächen beſtehe, wenn ich ſchon den Satz von der Summe der Quadraten gebrauche. Da ich das Brauchbarſte überall, wo ich es zu finden glaubte, zuſammen, und ſo deutlich, als ich es konnte, vorzutragen mir Mühe gegeben habe, ſo hoffe ich, daß meine Anfangsgründe nicht bloß angehenden Förſtern allein, ſondern Anfängern überhaupts, welche ſich mit den erſten und nöthigſten Lehren der Rechen- und Meßkunſt bekannt machen wollen, dienlich ſeyn werden. Sollten noch einige merk-

liche

liche Druckfehler über diejenige, die am Ende beygedruckt ſind, ungeachtet der Aufmerkſamkeit, mit welcher ich ſie bey der Korrektur aufſuchte, in dem Werke zurückgeblieben ſeyn, ſo bitte ich den Leſer, ſelbſt die Güte zu haben, dieſelben zu verbeſſeren.

München im Junius 1788.

Georg Grünberger.



Vorerinnerungen.

Alles, was ſich vermehren, oder vermindern läßt, heißt eine Größe. Die Mathematik handelt von ihren Eigenſchaften, und lehrt Größen miteinander vergleichen.

Die Mathematiker pflegen die ihnen eigene Worte ſowohl als auch die Sachen, wovon die Rede iſt, immer genau und deut-

lich im voraus zu erklären. Sie geben in ihren Erklärungen die Merkmale an, wodurch ſich die Dinge voneinander unterſcheiden. Enthalten die Erklärungen, die Art wie eine Sache entſteht; ſo heißen ſie Sacherklärungen, die übrigen aber Worterklärungen.

Grundſätze ſind Sätze, deren Wahrheit Jedermann einleuchtet, ſobald man den Sinn der Worte verſteht, mit denen ſie vorgetragen ſind.

Forderungen verlangen, daß man zugebe, es ſeye etwas möglich, ohne die Art anzuzeigen, wie man es bewerkſtelligen könne; etwa weil die Sache ſo leicht iſt, das ſie Jedem von ſelbſt beyfällt.

Sätze deren Wahrheit erſt durch Schlüſſe dargethan werden muß, heißen Lehrſätze. Fordern die Sätze das man etwas verrichte; ſo heißen ſie Aufgaben.

Die

Die Auflöſung der Aufgaben muß zeigen, wie man das Verlangte bewerkſtelligen könne; und der Beweis, welcher auf die Auflöſung folgt, die Richtigkeit des Verfahrens darthun.

Wenn Sätze, die an ſich merkwürdig ſind, aus Grundſätzen und Lehrſätzen allein, oder auch in Verbindung mit andern ſchon erwieſenen Sätzen fließen; ſo nennt man ſie Zuſätze.

Die Bemerkungen enthalten meiſtens Erläuterungen, Anwendungen, die Geſchichte der Erfindung eines Satzes ꝛc.

Wenn man aus mehreren möglichen Dingen etwas annimmt, und feſtſetzt; ſo heißen die Sätze, worinn dieſes geſchieht, willkührliche Sätze. So iſt z. B. in der Zahlenrechenkunſt die Anzahl der Zahlzeichen willkührlich. Nimmt man aber deren neune an; ſo heißt der Satz wodurch dieſes feſtgeſetzt wird, ein willkührlicher Satz. Hieher gehören

hören auch die Sätze wodurch die Zeichen beſtimmt werden, mit denen man die Gleichheit, die Ungleichheit zwoer Größen oder Zahlen, die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Diviſion ꝛc. anzuzeigen pflegt, als

I. = iſt das Zeichen der Gleichheit.

II. 7 > 4 zeigt an das 7 größer ſeye als 4. Die Spitze des Zeichen iſt immer auf der Seite der kleineren Größe.

III. + iſt das Zeichen der Addition z. B. 3+7=10.

IV. — iſt das Zeichen der Subtraktion, z. B. 8—5=3.

V. 4×5 oder 4. 5. zeigt an, das 4 mit 5 zu multiplizieren ſeye.

VI. 14 : 7. oder $\frac{14}{7}$ heißt, das 14 durch 7 dividirt werden ſoll.

VII.

VII. $\sqrt[3]{32}$ zeigt an, man ſolle aus 32 eine Wurzel ausziehen, und zwar diejenige, welche die Zahl angiebt, welche in das Wurzelzeichen eingeſchrieben iſt.

VIII. Wenn man das Wort Dreyeck durch △, und die Aehnlichkeit durch ein liegendes S oder ∽ angezeigt; ſo heißt z. B. △ABC ∽ △abc, daß das Dreyeck, welches mit A, B, C an den Scheiteln ſeiner Winkel bezeichnet iſt, dem Dreyeck, an deſſen Scheiteln die Buchſtaben a, b, c ſtehen, ähnlich ſeye ꝛc.

Von der Zahlenrechenkunſt.

§. 1. Betrachtet man die Größe blos als ein Ganzes, als eine Menge von Theilen, ohne auf Verbindung der Theile Rückſicht zu nehmen; ſo iſt ſie ein Gegenſtand der Arithmetik oder Rechenkunſt.

§. 2. Erklär. Man kann bey Dingen entweder auf die Merkmale ſehen, die ſie

miteinander gemein haben, oder auch nur auf die, wodurch ſie ſich von einander unterſcheiden. In der erſten Rückſicht heißen ſie gleicharrig, in der zwoten ungleichartig. So ſind z. B. Eichen, und Fichten als Bäume eines Waldes betrachtet, gleichartige; in ſoweit aber jene zu Laub= dieſe zu Nadelholz gehören, ungleichartige Dinge.

§. 3. **Erklär.** Die Größe als eine Menge von gleichartigen und gleichen Theilen betrachtet, heißt eine **Zahl**, und jeder der gleichartigen Theile eine **Einheit**. Die Zahl iſt alſo eine Menge von Einheiten.

§ 4. Zuſatz. Sieben Tagwerke Holzgrund, und zwey Kohlenmeiler geben zuſammen die Zahl neune nicht, denn ſie ſind miteinander weder neun Tagwerke noch neun Kohlenmeiler. Man ſieht daher, daß ungleichartige Dinge nicht zuſammengezählt werden oder eine Zahl ausmachen können.

§. 5.

§. 5. Anmerk. Ich ſetze hier die Namen der Zahlen als bekannt voraus. Es mag genug ſeyn, wenn ich ſage, das zehnmal zehn hundert, zehnmal hundert tauſend, tauſendmal tauſend Million, Millionmal Million Billion, Millionmal Billion Trillion ꝛc. heiße.

§. 6. Willkühꝛl. Satz. Die Zahlzeichen deren wir uns bedienen ſind folgende: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. die der Ordnung nach, in der ſie geſchrieben ſind, eins, zwey, drey, vier, fünf, ſechs, ſieben, acht, und neun bedeuten.

Um mit ſo wenig Zeichen alle mögliche Zahlen ausdrücken zu können, mußte man denſelben noch einen andern Werth beylegen, als der iſt, den ſie ihrer Figur gemäß haben. Man hatte einmal neun Zahlzeichen gewählt, und ſetzte daher feſt, daß, wenn die Ziffern nebeneinander geſchrieben ſind, jede Einheit in der nächſtfolgenden Stelle von der rechten Hand zur linken zehnmal ſo viel gelten

ten ſolle, als in der nächſt vorhergehenden. Dadurch kommen die Einer oder Zahlen, welche mit den einzelnen Zahlzeichen angeſchrieben werden können, in die erſte Stelle rechter Hand zu ſtehen; die Zehner in die zweyte, die Hunderter in die dritte, die Tauſender in die vierte, die Zehntauſender in die fünfte, die Hunderttauſender in die ſechſte, die Millionen in die ſiebende Stelle ꝛc gegen die linke Hand. Geſchieht es, daß für eine Stelle oder Ordnung keine Zahlen gegeben ſind; ſo füllt man ſelbe mit dem Zeichen des Abganges der 0 aus, um dadurch den übrigen Ziffern den Werth, den ſie durch die Stelle bekommen, welche ſie einnehmen, gehörig zu erhalten.

§. 7. Aufgabe. Jede Zahl, die mit Ziffern geſchrieben iſt, auszuſprechen.

Auflöſung. Wenn man die vorgelegte Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klaſſen theilt, jeder Klaſſe ſechs Ziffern giebt, und die niedrigſte Ordnung der zwoten Klaſ-

ſe

ſe mit einen, die niedrigſte Ordnung der dritten Klaſſe mit zwey u. ſ. w. oben angebrachten Strichchen bezeichnet; ſo laſſen ſich die Zahlen ganz bequem ausſprechen, indem immer hunderttauſender, zehntauſender, tauſender, hunderter, zehner, einer aufeinander folgen, §. 6. Nur daß man nach den Einern der zwoten Klaſſe, Million, nach den Einern der dritten Klaſſe Billion ꝛc. dazuſagt. Die letzte Klaſſe zur linken Hand kann auch weniger als ſechs Ziffer haben.

Beyſpiel. $450{,}^{\prime\prime\prime}345676{,}^{\prime\prime}781033{,}^{\prime}456767$. Dieſe Zahl wird, wie folgt, ausgeſprochen: Vierhundert fünfzig Trillionen, dreyhundert fünf und vierzig tauſend, ſechshundert, ſechs und ſiebenzig Billionen, ſiebenhundert ein und achtzig tauſend, drey und dreyßig Millionen, vierhundert ſechs und fünfzig tauſend, ſiebenhundert, ſieben und ſechszig.

Beweis. Betrachtet man jede Klaſſe als eine Menge von Einheiten ihrer niedrigſten

Stelle,

Stelle, die ihnen den Namen giebt; ſo ſieht man die Richtigkeit des Verfahrens ein. §. 6.

§. 8. Aufgabe. Eine Zahl, die mit Worten angegeben wird, durch Ziffern auszudrucken.

Auflöſung. Man drücke jede gegebene Anzahl Einheiten von jeder Ordnung durch das gehörige Zahlzeichen aus, und bringe jede Ziffer in die ihr zugehörige Klaſſe, und Stelle in dieſer Klaſſe. Iſt von einer Stelle oder Ordnung nichts gegeben; ſo fülle man dieſelbe mit der 0 aus; ſo iſt geſchehen was man verlangte.

Beyſpiel. Zweyhundert, ſechs Billionen, drey und dreyßig tauſend ein und vierzig Millionen, fünfhundert tauſend, ſechshundert, und ſieben und dreyßig.

$\overset{\prime\prime}{2}06,033\overset{\prime}{0}41,500637.$

Beweis. Wenn jede Ziffer, welche die gegebene Anzahl Einheiten jeder Ordnung ausdrückt,

drückt, nicht nur in die gehörige Klaſſe kommt, ſondern auch in die Stelle dieſer Klaſſe, worinn ſie den verlangten Werth erhält; indem man zu dieſem Ende die Stellen, wovon nichts gegeben iſt, mit der o ausfüllt; ſo muß vermöge der §. 6. erklärten Einrichtung des Zahlengebäudes die Bezeichnung der ausgeſprochenen Zahl deßwegen richtig ſeyn, weil, wenn man ſie nach §. 7. gehörig ausſpricht, ſie der Zahl, die mit Worten angegeben ward, ganz gleichlautend ſeyn wird.

§. 9. **Erklär.** Wenn man zu einer Zahl, eine oder mehrere andere ihr ungleiche Zahlen hinzuthut, um eine zu finden, die allen zuſammengenommen gleich iſt; ſo heißt das Verfahren, **addiren**, und die geſuchte Zahl **die Summe.**

§. 10. **Aufgabe. Zahlen zuſammen addiren.**

Auf-

Auflöſung. I. Man bringe Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter ꝛc.

II. Man zähle alle Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. zuſammen. Betragen dieſe Summen mehr als 9; ſo ſetze man für jede Zehn eine Einheit in der nächſtfolgenden Stelle mehr.

Beyſpiel. 78691.
5446.
399.

Summe = 84536.

Beweis. Nach I. kommen die Einheiten einer Art genau untereinander zu ſtehen: Sie laſſen ſich alſo zuſammen zählen, und weil zehn Einheiten von einer vorhergehenden Ordnung nur eine von der nächſtfolgenden ausmachen; ſo erhellt auch die Richtigkeit von II. Man erhält alſo, indem man alle Einheiten, Zehner, Hunderter ꝛc. das iſt, alle Theile zuſammen nimmt, offenbar das Ganze oder die Summe, die allen Theilen zuſammengenommen gleich iſt.

§. 11.

§. 11. Erklär. Subtrahiren heißt eine Zahl von der andern wegnehmen. Die Zahl, welche man dadurch erhält, heißt Differenz, Reſt, Unterſchied.

§ 12 Zuſatz. Setzt man zu dem was nach der Subtraktion übrig bleibt, das, was man hinweggenommen hat, wieder hinzu; ſo muß die Zahl herauskommen, von welcher man die andere ſubtrahirt hat.

§. 13. Aufgabe. Eine kleinere Zahl von einer größeren zu ſubtrahiren.

Auflöſung. I. Man ſchreibe beyde Zahlen wieder ſo untereinander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter ꝛc. zu ſtehen kommen.

II. Man ziehe die Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. der kleinern Zahl von den Einern, Zehnern, Hunderten ꝛc. der größeren weg, nnd ſetze die einzelnen Reſte in eben der Ordnung unter dieſelben.

III.

III. Iſt bey einer Stelle die Menge Einheiten, welche man abziehen will, größer, als die, wovon man ſie abziehen ſoll; ſo borge man eine Einheit von der Ziffer der nächſtfolgenden Stelle. Die Ziffer, von welcher man borgte, wird in der Folge als eine angeſehen, die um eine Einheit kleiner iſt, als ihre Figur ſonſt anzeigt.

IV. Iſt in der folgenden Stelle, wo man borgen will, eine Nulle, oder folgen mehrere Nullen; ſo entlehne man eine Einheit von dem nächſtfolgenden Zahlzeichen, und ſehe die Stellen der Nullen an, als wenn ſie mit lauter 9 ausgefüllt wären.

Beyſpiel.	4688	2577	2003	2000073
	2345	384	242	345678
Differenz.	2343.	2193.	1761.	1654395

Beweis. Wenn die Menge Einheiten der Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. in der Zahl, die man abziehen will, alle kleiner ſind, als die Menge Einheiten der Einer,

Zeh-

Zehner, Hunderter ꝛc. derjenigen Zahl, wovon man abziehen ſoll; ſo erhält man auf dieſe Art offenbar die Summe aller Unterſchiede der Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. oder den ganzen Unterſchied. Muß man borgen; ſo kann die Subtraktion deßwegen immer geſchehen, weil die geborgte Einheit da 10 gilt, und die Ziffer, welche man abziehen ſoll, nie größer als 9 ſeyn kann. Folgen, wie in IV angenommen wird, eine oder mehrere Nullen auf einander, und man entlehnt von dem nächſten Zahlzeichen eine Einheit; ſo gilt dieſe in der Stelle derjenigen 0, welche auf das Zahlzeichen folgt, 10 Einheiten. Nimmt man von dieſen zehen Einheiten abermal eine weg; ſo bleiben 9 auf derſerben Stelle, und die eine, welche man weggenommen hat, gilt in der folgenden wieder zehen, u. ſ. w. Dadurch werden alle Nullen in 9 verwandelt, weil bey jeder von den zehen Einheiten, die ſie auf dieſe Art erhalten, eine für die folgende Stelle, abgegeben werden muß.

§. 14.

§. 14. Zuſatz. Die Probe der Addition kann durch die Subtraktion gemacht werden. Hat man nur zwo Zahlen zuſammen addirt, und man nimmt die eine von der Summe weg; ſo muß die andere im Reſte bleiben. Bey mehreren als zwoen, addire man alle Zahlen bis auf eine zuſammen, und ziehe ihre Summe von der Summe aller weg; ſo muß diejenige im Reſte kommen, welche bey der erſteren Summe mangelt.

Beyſpiel.

1234=A		
634=B	634=B	1946=A+B+C
78=C	78=C	712= B+C
1946=A+B+C	712=B+C	1234=A

§. 15. Zuſatz. Die Subtraktion zu prüfen addire man die ſubtrahirte Zahl zur Differenz, die Summe wird derjenigen gleich ſeyn, von welcher man den Abzug machte § 12.

§. 16. Erklär. Eine Zahl ſo oft nehmen, oder zu ſich ſelbſt hinzuthun, als eine

andere

andere Einheiten hat, heißt, beyde Zahlen miteinander *multipliziren*. Die Zahl, welche man dadurch erhält, das Produkt, *Faktum*; die Zahlen aber, welche miteinander multiplizirt werden, *Faktores*. Auch nennt man die Zahl, welche multiplizirt wird, das *Multiplikandum*, und diejenige, mit der man multiplizirt, den *Multiplikator*.

§. 17. Zuſatz. Da man einerley erhält, mit welchem Faktor man den andern multiplizirt; ſo enthält der eine die Einheit ſo oft, als das Produkt den andern.

§. 18. Anmerkung. Das ſogenannte *Ein mal eins* enthält alle Produkte der einfachen Zahlen oder ſolcher, wo jeder Faktor nur mit einer Ziffer geſchrieben iſt. Um es zu verfertigen, darf man nur jede Zahl einmal, zweymal ꝛc. bis neunmal zu ſich ſelbſt addiren, und das Produkt in eine Tabelle eintragen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

In gegenwärtiger Tafel ſteht jedes Produkt neben dem einen Faktor unter dem andern. Z. B. die zween Faktoren wären 7 und 8. und man wollte wiſſen, wie viel 7mal 8 wäre; ſo findet man 56 unter der Zahl ſieben, die oben iſt, neben der Zahl

8,

8, die ſich in der erſten Reihe Linkerhand befindet. Suchet man unter 8 und neben 7, ſo trift man ebenfalls 56 an. Wer ſich im Rechnen eine Fertigkeit erwerben will, oder viel zu rechnen hat; dem iſt es ſchlechterdings nothwendig, das ſogenannte Ein mal eins auswendig zu wiſſen.

§. 19. Aufgabe. Eine Zahl mit der andern zu multipliziren.

Auflöſung. Erſter Fall. Wenn der eine Faktor nur aus einer Ziffer beſteht.

I. Multiplizire man die Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. der Zahl A mit der Ziffer der Zahl B.

$$\begin{array}{r} 45678 = A \\ 7 = B \\ \hline 319746 = A.B. \end{array}$$

II. Für jeden Zehner der einzelnen Produkte, addire man bey dem folgenden eine Einheit. Was man auf dieſe Art erhält, iſt das Produkt von A in B.

Zweyter Fall. Beſtehen beyde Faktorn aus mehr dann einer Ziffer; ſo I. multiplizire man alle Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. von A mit den Einern von B wie im erſten Falle, um C zu erhalten.

```
   4567 = A
    326 = B
-------------
  27402 = C
  9134- = D
13701-- = E.
-------------
1488842 = A.B.
```

II. Denn multiplizire man alle Ziffern von A mit den Zehnern von B, ſchreibe aber die Ziffern dieſes Produkts D, ſo unter die vorigen, daß deſſen niedrigſte Ziffer um eine Stelle weiter gegen die Linke hin zu ſtehen komme, und verfahre eben ſo mit den Hunderten ꝛc. von B.

III. Endlich addire man die untereinander ſtehenden Zahlen C, D und E gehörig zuſammen, ſo wird man das Produkt der beyden Zahlen A und B haben.

Beweis. Für den erſten Fall. Nimmt man alle Theile von A ſo vielmal als B

Ein-

Einheiten hat, ſo nimmt man offenbar das Ganze ſo oft als B Einheiten hat. Da ferners jede Zehen einer nächſtniedrigere Klaſſe eine Einheit der nächſtfolgenden ausmachen §. 6. ſo iſt auch das Verfahren von II. richtig.

Für den zweyten Fall Nach der Auflöſung nimmt man alle Theile oder Ziffern von A ſo vielmal als in den Einern von B Einheiten ſind; dann ſo vielmal als in den Zehnern, Hunderten ꝛc. von B Einheiten ſind. Wenn man aber alle Theile von A ſo vielmal nimmt, als in allen Theilen von B die Einheit ſteckt; ſo nimmt man offenbar das Ganze A ſo vielmal als in dem Ganzen B die Einheit enthalten iſt. Alſo müſſen alle Produkte der einzelnen Theile das Produkt des Ganzen geben. Die Urſache, warum man die niedrigſte Ziffer des Produktes von der Zahl A in die Zehner von B, unter die Stellen der Zehner, bey Hunderten unter die Stelle von Hunderten ꝛc. ſchreibt, iſt: weil, wenn man einen Zehner,

Hunderter ꝛc. etlichemal nimmt, das Produkt Zehner, Hunderter ꝛc. geben muß.

§. 20. Zuſatz. Wenn in dem Multiplikator, wie hier bey B Nullen vorkommen, ſo wird das Produkt D aus lauter Nullen beſtehen, weil etlichemal Nichts, nie etwas ſeyn kann.

435	= A
203	= B
1305	= C
000	= D
870	= E
88305	= A. B.

Schreibt man nur die erſte Nulle, und ſetzt das Produkt der folgenden Ziffer 2 von B ſogleich an ſelbes hin, ſo giebt dieſes einige Verkürzung im Schreiben. Man könnte dieſe Nulle auch weglaſſen, wenn man nur mit dem Produkte der folgenden Zahl gehörig vorrückt, obwohl es beſſer ſeyn muß, ſich an jenes als dieſes zu gewöhnen, wenn man den etwa dadurch möglichen Verſehen in der Rechnung vorkommen will.

435	= A
203	= B
1305	= C
8700	= D
88305	= A. B.

§. 21. Wenn die letzten Ziffern eines Faktors Nullen ſind, ſo multiplizirt man die Zahlzeichen allein miteinander, und hängt dem Produkte hinten ſo viel Nullen an, als beyde Faktoren zuſammen gehabt haben.

Beyſpiel.

$$\begin{array}{r} 34000 = A \\ 2200 = B \\ \hline 68 \\ 68 \\ \hline 74800000 = AB. \end{array}$$

§. 22. **Erklärung.** Eine Zahl von einer andern ſo oft wegnehmen, als man kann, heißt **dividiren**. Man ſucht dadurch zu erfahren, wie oft eine Zahl in der andern enthalten iſt. Die Zahl, welche man dividirt, nennt man das **Dividendum**. Die Zahl mit der man dividirt, den **Diviſor**; und diejenige, welche durch die Diviſion herauskömmt, den **Quotienten** oder **Quotus**.

§. 23. Zuſatz. Der Quotient zeigt an, wie vielmal man den Diviſor von dem Dividendo wegnehmen kann, oder wie oft der Diviſor in dem Dividendo enthalten iſt. Daher muß der Diviſor im Dividendo ſo oft ſtecken, als die Einheit in dem Quotienten.

§. 24. Aufgabe. Eine groͤßere Zahl durch eine andere kleinere zu dividiren.

Aufloͤſung. Erſter Fall, wo der Diviſor nur aus einer Ziffer beſteht.

I. Man ſehe wie oft der Diviſor 6 in der erſten Ziffer 4 Linkerhand, oder wenn die erſte allein zu klein, in den zwoen erſten Ziffern 45 des Dividendi enthalten ſeye. Sucht man in dem Ein mal eins die Produkten des Diviſors mit den uͤbrigen Zahlzeichen durch; ſo wird ſich eines finden, das entweder die Zahl ſelbſt iſt, welche dividirt wird, oder ihr doch am naͤchſten koͤmmt. Wer das Ein mal eins auswendig weis, braucht ſich hieruͤ-

ber

der nicht lange zu beſinnen, oder aufzuſuchen, weil er weis, daß das Produkt von 6 in 7 = 42 der Zahl 45 an nächſten kömmt.

Diviſor.	Dividendum.	Quotient.
6 = d	45648 = D	7608 = q

42	
36	Daher iſt 6 in 45
36	7mal ganz und noch
04	etwas darüber ent-
0	halten. Nun ſind
48	aber dieſe 45 Tau-
47	ſender, folglich die 7
0	ebenfalls Tauſender.

Man könnte alſo dem Quotienten drey Nullen anhängen, um anzuzeigen, daß die 7 Tauſender ſind. Allein da man auf eben die Art ſucht, wie oft der Diviſor in den Hunderten, Zehnern und Einheiten von D enthalten iſt, und dieſe einzelne Quotienten einen nach dem andern Rechterhand neben den 7 hinſchreibt, ſo kommen die 7 ohnehin in die Stelle der Tauſender zu ſtehen.

II.

II. Den gefundenen Quotienten 7 multiplizire man mit dem Diviſor 6, und ziehe das Produkt 42 von dem was man dividirte, das iſt, von 45 ab; ſo bleibt 3 im Reſte.

III. Zu dieſem Reſte 3, der Tauſender angezeigt, ſetze man die nächſte Ziffer 6 des Dividendi, die Hunderter bedeutet; ſo hat man 36, aber Hunderter, weil 3000 + 600 = 3600 iſt.

IV. Man ſuche abermal nach I. wie oft der Diviſor 6 in den 36 Hunderten enthalten iſt, den Quotienten 6 der ebenfalls Hunderter bedeutet, ſchreibe man neben dem vorigen 7 Rechterhand, und multiplizire nach II. den Quotienten 6 mit dem Diviſor 6, und ziehe das Produkt 36 von dem was man dividirte, nämlich von 36 ab.

V. Zu dem Reſte 0 weil 36 — 36 = 0 iſt, ſetze man die folgende Ziffer des Dividendi D nämlich 4 und verfahre wie in I.

II.

II. III. und IV. bis man zu Ende iſt. Macht man die Rechnung in unſerem Beyſpiele fort; ſo iſt 6 in 4 niemal enthalten; man ſetzt daher Rechterhand an den vorigen Quotienten 6, eine 0, weil $0 \times 6 = 0$ iſt, und $4 - 0 = 4$. II. ſo thut man zu den 4 noch die letzte Ziffer 8 Rechterhand hinzu III, und ſucht wie oft 6 in 48 enthalten iſt. I. den Quotienten 8 ſchreibt man Rechterhand neben dem vorigen 0. Weil endlich $6 \times 8 = 48$ giebt, und $48 - 48 = 0$ iſt II, ſo bleibt zuletzt kein Reſt mehr, und der geſammte Quotient iſt $= 7608$.

Zweyter Fall. Wenn der Diviſor aus mehr denn einer Ziffer beſteht.

I.

I. Man ſuche wie oft der Diviſor in ſo viel Ziffern als er hat, oder wenn dieſe nicht zureichen in einer um eins größeren Anzahl von Ziffern des Dividendi enthalten ſeye. Oder man ſehe nur wie oft die höchſte Ziffer des Diviſors in den korreſpondirenden Ziffern dis Dividendi ſtecke, und nehme dieſes als den Quotienten an.

Diviſ	Dividen.	Quot.
321	123567	384.
	321	
	963	
	2729	
	321	
	2568	
	1587	
	321	
	1284	
	303	

II. Multiplizirt man alle Ziffern des Diviſors mit dem eben gefundenen Quotienten; ſo darf das Produkt nicht größer ſeyn als die Zahl, welche man dividirt hat. Man erkennt alſo leicht, ob man vielleicht deßwegen den Quotienten zu groß genommen habe; weil man bloß mit dem erſten Zahlzeichen des Diviſors dividirte, ohne auf die übrigen Rückſicht zu nehmen. Hat man den Quotienten zu groß genommen; ſo ver-

min-

mindert man denſelben nach und nach jedesmal um eine Einheit, bis deſſen Produkt in dem Diviſor in der Zahl, welche man dividiren ſoll, enthalten ſeyn kann.

III. Uebrigens verfährt man wie bey dem erſten Falle ſo wie es das beygefügte Beyſpiel zeigt.

Beweis. Der Diviſor iſt offenbar ſo vielmal in dem Dividendo enthalten, als er ſich davon ſubtrahiren läßt. Nach der Vorſchrift der Auflöſung hat man den Diviſor mit allen Theilen des Quotienten multiplizirt, und die Produkte von dem Dividendo abgezogen, man hat ihn alſo ſo vielmal von dem Dividendo weggenommen, als der Quotient Einheiten hat, folglich iſt er in dem Dividendo ſo vielmal enthalten, als die Einheit in dem Quotienten. §. 23.

§. 25. **Zuſatz.** Wenn es geſchieht wie im Beyſpiel §. 24. das zuletzt was übrig bleibt; ſo zeigt dieſes an, daß der Diviſor

in

in dem Dividendo etlichemal ganz, und etwas darüber enthalten ſeye, in dem angeführten Beyſpiel, mehr als 384mal, aber nicht völlig 385mal. Man pflegt dieſe Reſte dem Quotienten anzuhängen, indem man ſie über einen Querſtrich, den Diviſor aber unter denſelben neben dem Quotienten ſetzt. Z. B. $384\frac{303}{321}$. Die eigentliche Bedeutung hievon wird in der Folge bey den Brüchen erklärt werden.

§. 26. Zuſatz. Wenn man den Quotienten mit dem Diviſor multiplizirt, und wenn etwas zuletzt wie §. 24. übrig geblieben, den Reſt dazu addirt; ſo muß das Dividendum herauskommen. Denn das Dividendum ohne den Reſt enthält den Diviſor ſo vielmal als der Quotient die Einheit. Multiplizirt man alſo dem Diviſor mit dem Quotienten; ſo bekömmt man eine Zahl, die ſammt dem Reſt dem Dividendo gleich iſt. Dieß kann dienen die Diviſion zu prüfen, oder wie man es nennt, die Probe der Diviſion zu machen.

§. 27. Dividirt man das Produkt durch einen der beyden Faktorn; ſo kömmt der andere in den Quotienten: weil der eine ſo oft in dem Produkte enthalten ſeyn muß, als die Einheit in dem andern §. 17. Dieſes kann dienen die Probe bey der Multiplikation zu machen.

Von Brüchen.

§. 28. Erklärung. Theilt man ein Ganzes in mehrere gleiche Theile, ſo heißen ein oder etliche Theile davon, ein Bruch.

§. 29. Zuſatz. Daher braucht man, um einen Bruch anzuzeigen zwo Zahlen, wovon die eine anzeigen muß, in wie viel gleiche Theile das Ganze eingetheilt iſt; die andere, wie viel ſolcher Theile zum Bruch gehören. Jene heißt der Nenner, dieſe der Zehler. Z. B. Wenn das Ganze in 5 gleiche Theile getheilt iſt, und man nimmt 3 davon für den Bruch; ſo enthält der Bruch 3 ſolche Theile wovon das Ganze 5 hat, oder er beträgt dreyfünftel vom Ganzen.

§. 30. Zuſatz. Je in mehr gleiche Theile ein Ganzes eingetheilt wird, deſto kleiner werden die Theile. Weil nun der Nenner angezeigt, in wie viel gleiche Theile man ſich das Ganze eingetheilt vorſtellen muß; ſo beſtimmt er in Rückſicht des Ganzen die Größe ſo wie der Zehler die Menge der Theile, welche auf den Bruch gehen.

§. 31. Willkühr. Satz. Man pflegt die Brüche dadurch anzuzeigen, daß man den Zehler über, und den Nenner unter einem Querſtrich ſetzt. Z. B. Dreyfünftel drückt man durch $\frac{3}{5}$ aus.

§. 32. Erklärung. Wenn der Zehler kleiner als der Nenner iſt; ſo heißt der Bruch ein eigentlicher Bruch; z. B. $\frac{3}{7}$. Iſt der Zehler größer als der Nenner; ſo heißt der Bruch ein Afterbruch; z. B. $\frac{14}{3}$.

§. 33. Zuſatz. Der wahre Bruch iſt alſo kleiner, der Afterbruch größer als ein Ganzes. Sind Zehler und Nenner einan-

der

der gleich, ſo iſt der Werth des Bruches $= 1$. Z. B. $\frac{4}{4} = \frac{7}{7} = \frac{19}{19} = 1$. Denn alle Theile des Ganzen machen das Ganze aus.

§. 34. Zuſatz. Weil bey Afterbrüchen die Zehler größer ſind, als die Nenner; ſo kann man die Zehler durch die Nenner dividiren, und den Reſt eben ſo, wie §. 25. bey der Diviſion gelehrt worden, dem Quotienten anhängen. Z. B. $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$. Im Gegentheil wenn Brüche an Ganzen hangen, ſo laſſen ſich Afterbrüche daraus machen, wenn man die ganzen Zahlen mit dem Nenner multiplizirt, zu dem Produkte den Zehler addirt, und den Nenner darunter ſetzt: z. B. $4\frac{5}{7} = \frac{28+5}{7} = \frac{33}{7}$. Denn jede Einheit von den 4 iſt $= \frac{7}{7}$ §. 33; alſo alle vier $= \frac{4 \times 7}{7} = \frac{28}{7}$. Setzt man daher die $\frac{5}{7}$, welche den Bruch ausmachen, ebenfalls dazu, ſo hat man $\frac{28+5}{7} = \frac{33}{7}$.

§. 35. Lehrſatz. Wenn man mit einer ganzen Zahl entweder den Zehler multiplizirt, oder den Nenner dividirt; ſo wird

der Werth des Bruches ſo vielmal größer, als die Zahl Einheiten hat, mit der man den Zehler multiplizirt, oder den Nenner dividirt.

Beweis. Multiplizirt man den Zehler allein mit einer ganzen Zahl, ſo nimmt man eine Menge Theile von eben der Größe ſo vielmal, als die Zahl Einheiten hat, mit der man ihn multiplizirt: dividirt man nur den Nenner durch eine ganze Zahl, ſo werden die Theile, welche auf das Ganze gehen, ſo vielmal weniger; folglich die, welche den Bruch ausmachen, ſo vielmal größer als die Zahl Einheiten hat, mit welcher man den Nenner dividirt §. 30. Daher wird in beyden Fällen der Werth des Bruches ſo vielmal größer, als die Zahl Einheiten hat, mit der man den Zehler multiplizirt, oder den Nenner dividirt.

§. 36. Zuſatz. Wenn alſo Ganze und Brüche ineinander zu multipliziren ſind; ſo darf man entweder den Zehler allein mit

der

der ganzen Zahl multiplizíren, oder nur den Nenner dadurch dividiren. Z. B.

$\frac{4}{5} \times 4 = \frac{4 \times 3}{15} = \frac{12}{15}$ oder $= \frac{4}{15 : 3} = \frac{4}{5}$.

§. 37. Lehrſatz. Wenn man mit einer ganzen Zahl entweder den Zehler dividirt, oder den Nenner multiplizirt; ſo wird der Werth des Bruches ſo vielmal kleiner, als die Zahl Einheiten hat, mit der man den Zehler dividirt, oder den Nenner multiplizirt.

Beweis. Dividirt man den Zehler allein mit einer ganzen Zahl, ſo bekömmt man um ſo viel wenigere Theile von eben der Größe, als die Zahl Einheiten hat, mit der man ihn dividirt. Multiplizirt man den Nenner; ſo werden die Theile, welche auf das Ganze gehen, um ſo viel mehr; folglich die, welche den Bruch ausmachen, um ſo viel kleiner, als die Zahl Einheiten hat, mit welcher man den Nenner multiplizirt §. 30. Alſo wird in beyden Fällen der Werth des Bruches ſo vielmal kleiner, als die Zahl

Einheiten hat, mit der man entweder den Zehler dividirt, oder den Nenner multipli-zirt.

§. 38. Zuſatz. Wenn daher Brüche durch Ganze zu dividiren ſind; ſo darf man entweder nur den Zehler durch die ganze Zahl dividiren, oder den Nenner damit mul-tipliziren z. B. $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4:2}{5} = \frac{2}{5}$ oder $\frac{4}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$.

§. 39. Lehrſatz. Wenn man ſowohl Zehler als Nenner mit einer nämlichen dritten Zahl multiplizirt oder dividirt; ſo bleibt der Werth des Bruches unverändert.

Beweis. Weil die Zahl mit der man ſowohl Zehler als Nenner entweder multiplizirt, oder dividirt die nämliche iſt; ſo wird der Bruch durch die Multiplikation des Zehlers ſo viel vermehrt §. 35. als durch die Multiplikation des Nenners vermindert §. 37. und ſo auch durch die Diviſion des Zehlers ſo viel vermindert §. 37. als durch die Diviſion des Nenners vermehrt §. 35.

folg-

folglich bleibt der Werth des Bruches unge=ändert, wenn man ſowohl Zehler als Nenner, entweder mit einer nämlichen dritten Zahl multiplizirt oder dividirt.

§. 40. Aufgabe. Brüche auf einen kleineren Ausdruck zu bringen.

Auflöſung. Man dividire ſowohl Zehler als Nenner mit einer nämlichen dritten Zahl; ſo wird man einen Bruch erhalten, der dem gegebenen gleich iſt, §. 39. und, weil man ſowohl Zehler als Nenner dividirt hat, durch einen kleineren Zehler, und Nenner ausgedrückt wird.

§. 41. Anmerkung. In der Ausübung läßt es ſich nicht immer ſo leicht entdecken, durch welche Zahl ſowohl Zehler als Nenner ohne Reſt dividirt werden kann. Folgende Regeln mögen in einigen Fällen dienen. Wenn ſich in der Stelle der Einer die o oder gerade Zahlen, das iſt, 2, 4, 6, 8 befinden; ſo läßt ſich alles durch 2

dividiren. Befindet ſich in der Stelle der Einer die 5, ſo kann man die Zahl durch 5 dividiren. Wenn eine, zwo, drey ꝛc. Nullen ſich rechterhand befinden, ſo läßt ſich die Zahl durch 10, 100, 1000 ꝛc. dividiren. Wenn ſich die Summe aller Zahlzeichen eine Zahl durch 3 oder 9 dividiren läßt, ſo läßt ſich auch die Zahl ſelbſt dadurch dividiren. Der Beweis gründet ſich auf den allgemeinen Ausdruck jeder möglichen ganzen Zahl nach dem Geſetze der Decadik, und kann hier nicht beygebracht werden.

Beyſpiel. $\frac{42}{486}$ läßt ſich durch 2 aufheben, und giebt $\frac{42:2}{486:2} = \frac{21}{243}$. Weil aber $2+1=3$ und $2+4+3=9$ iſt; ſo kann man Zehler und Nenner auch durch 3 ohne Reſt dividiren. Man erhält $\frac{21:3}{243:3} = \frac{7}{81}$. Ferner $\frac{45}{940}$ kann mit 5 aufgehoben werden. Denn $\frac{45:5}{540:5}$ iſt $= \frac{9}{108}$ aber 9 ſowohl als $1+8$ laſſen ſich durch 9 dividiren; mithin kann man nochmal ſowohl Zehler als Nenner durch 9 dividiren, man erhält $\frac{9:9}{108:9} = \frac{1}{12}$. Weil ſich $\frac{42}{486}$ durch 2 und 3 und $\frac{45}{450}$ durch 5 und

9 aufheben läßt, ſo kann man bey dem erſten Bruche ſogleich mit 2×3=6 bey dem anderen mit 5×9=45 ſowohl Zehler als Nenner dividiren.

§. 42. Aufgabe. Brüche ſo verſchiedene Nenner haben, ohne Veränderung ihres Werths unter einerley Benennung zu bringen.

Aufloͤſung. Man multiplizire ſowohl Zehler als Nenner eines jeden Bruches mit den Nennern aller übrigen; ſo verändert ſich §. 39. ihr Werth nicht, und alle erhalten einerley Nenner.

Beyſpiel. Die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$ ſollen unter einerley Benennung gebracht werden. Nach der Regel erhält man $\frac{2\times6\times4}{3\times6\times4}$, $\frac{5\times3\times4}{6\times3\times4}$, $\frac{3\times3\times6}{4\times3\times6}$. und wenn man wirklich multiplizirt, ſo kommen folgende Brüche heraus: $\frac{48}{72}$, $\frac{60}{72}$, $\frac{54}{72}$. Man ſieht von ſelbſt, daß man den gemeinſchaftlichen Nenner nicht dreymal

zu

zu ſuchen nöthig habe; er iſt jederzeit dem Produkte aller Nenner gleich.

§. 43. Aufgabe. Brüche zu addiren.

Aufloſung. Wenn ſie verſchiedene Nenner haben; ſo bringe man ſie unter einerley Benennung, addire die Zehler, und ſetze unter ihre Summe den gemeinſchaftlichen Nenner.

Beyſpiel. Die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$ geben nach dem man ſie unter einerley Benennung gebracht hat, folgende $\frac{48}{72}$, $\frac{60}{72}$, $\frac{54}{72}$. Die Summe der Zehler oder $48+60+54$ iſt $=162$ folglich $\frac{162}{72}=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$.

Beweis. Wenn man Brüche unter einerley Benennung bringt; ſo ändert ſich §. 39. 42. der Werth der einzelnen Brüche, und alſo auch der ihrer Summe nicht. Ferners werden alle Einheiten aller Zehler gleichnamig; ſie laſſen ſich daher zuſammen zehlen §. 3. 4, und jeder Zehler giebt an wie

viel

viel dergleichen Einheiten auf jeden einzelnen Bruch, mithin die Summe der Zehler, wie viel auf die Summe aller Brüche gehen. Alſo darf man die Brüche nur unter einerley Benennung bringen, die Zehler zuſammen addiren, und den gemeinſchaftlichen Nenner unter die Summe der Zehler ſetzen, wenn man ihre Summe finden will.

§. 44. Zuſatz. Wenn Ganze vorkommen, an welche Brüche angehangen ſind; ſo kann man ſie nach §. 34. zu Afterbrüchen machen, und wie die Auflöſung der Aufgabe es erfordert, zuſammen addiren: man kömmt aber kürzer davon, wenn man die Ganzen, und die Brüche jede insbeſondere addirt. Z. B. $4\frac{3}{5} + 2\frac{2}{7} = 4 + 2 + \frac{3}{5} + \frac{2}{7} = 6 + \frac{21}{35}$ $= 6\frac{31}{35}$.

§. 45. Aufgabe. Brüche von einander abziehen.

Auflöſung. Man bringe ſie unter einerley Benennung, ſubtrahire die Zehler von

ein-

einander, und ſetze den gemeinſchaftlichen Nenner unter die Differenz der Zehler.

Beyſpiel. Es ſoll $\frac{2}{3}$ von $\frac{7}{8}$ abgezogen werden. Unter einerley Benennung gebracht, geben die Brüche $\frac{16}{24}$, $\frac{21}{24}$; folglich iſt ihre Differenz $\frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$.

Beweis. Iſt mit dem von der vorhergehenden Aufgabe einerley; nur daß man hier aus der Natur der Aufgabe ſtatt der Summe einen Unterſchied ſucht, und deßwegen die Zehler von einander abzieht.

§. 46. Zuſatz. Jedes Ganze kann als ein Afterbruch angeſehen werden, deſſen Nenner die Einheit iſt. So iſt z. B. $4 = \frac{4}{1}$, $7 = \frac{7}{1}$ ꝛc. Soll man daher einen Bruch von einer ganzen Zahl abziehen; ſo ſehe man die ganze Zahl als einen Bruch an, deſſen Nenner die Einheit iſt, und verfahre nach der Vorſchrift der Auflöſung §. 45. Aber kürzer geſchieht dieſes auf folgende Art: z. B. man ſoll $\frac{2}{3}$ von 5 abziehen, ſo iſt $5 - \frac{2}{3}$

$=4+\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=4\frac{1}{3}$. Nämlich man nimmt von der Zahl 5 eine Einheit, macht aus ihr einen Bruch deſſen Zehler und Nenner dem Nenner des Bruches, welcher abgezogen werden ſoll, gleich iſt, und zieht die Zehler dieſer Brüche voneinander ab.

§. 47. Aufgabe. Brüche mit Brüchen zu multipliziren.

Auflöſung. Man multiplizire die Zehler und Nenner der Brüche ineinander, und ſchreibe das Produkt der Nenner unter das der Zehler.

Beyſpiel. $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{28}$.

Beweis. Brüche mit Brüchen multipliziren heißt eigentlich, von dem einen einen ſo großen Theil nehmen, als der andere anzeigt. Soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{7}$ multiplizirt werden; ſo will das ſo viel ſagen, man ſoll den ſiebenten Theil von $\frac{3}{4}$ fünfmal, oder fünf ſieben Theile von $\frac{3}{4}$ nehmen. Multiplizirt man

den

den Nenner 4 des Bruches $\frac{3}{4}$ mit 7, ſo wird der Bruch ſiebenmal kleiner §. 37. Daher iſt $\frac{3}{4\times7}$ der ſiebente Theil von $\frac{3}{4}$. Nimmt man dieſen ſiebenten Theil oder $\frac{3}{4\times7}$ fünfmal, welches geſchieht, wenn man den Zehler 3 mit 5 multiplizirt §. 35; ſo erhält man das Produkt von $\frac{3}{4}$ in $\frac{5}{7} = \frac{3\times5}{4\times7} = \frac{15}{28}$. Betrachtet man das ganze Verfahren, ſo ſieht man daß man Zehler mit Zehlern, und Nenner mit Nennern multipliziren müſſe, um das Produkt der Brüche zu finden.

§. 48. Zuſatz. Bey ganzen Zahlen, an welchen Brüche hangen, mache man Afterbrüche daraus §. 34. und verfahre nach der Vorſchrift der Auflöſung. Z. B. $4\frac{2}{3}\times3\frac{1}{2} = \frac{14}{3}\times\frac{7}{2} = \frac{14\times7}{5\times2} = \frac{49}{8} = 16\frac{1}{3}$.

§. 49. Zuſatz. Wenn man eigentliche Brüche ineinander multiplizirt; ſo wird das Produkt kleiner als jeder der Faktorn, weil von dem einen nur ſo ein großer Theil genommen wird, als der andere anzeigt.

§. 50.

§. 50. Aufgabe. Brüche mit Brüchen zu dividiren.

Auflöſung. Man kehre denjenigen Bruch um, welcher der Diviſor iſt, und multiplizire ſie ſodann, wie §. 47.

Beyſpiel. $\frac{4}{7} : \frac{2}{3} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{14}$.

Beweis. Bringt man die Brüche unter einerley Benennung §. 42; ſo erhält man $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ und $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$. Folglich iſt $\frac{12}{21} : \frac{14}{21} = \frac{4}{7} : \frac{2}{3}$. Nun ſind aber 14 gleiche Theile eines Ganzen in 12 eben ſolchen Theilen ſo oft enthalten, als 14 Ganze in 12 Ganzen. Daher muß man 12 durch 14 dividiren, und man erhält $\frac{4}{7} : \frac{2}{3} = \frac{12}{14} = \frac{4 \times 3}{7 \times 2}$. Das iſt, man braucht nur den Bruch, durch welchen dividirt werden ſoll, umzukehren, und nach der Vorſchrift der Auflöſung zu multipliziren.

§. 51. Zuſatz. Wenn man eine ganze Zahl durch einen Bruch dividiren ſoll; ſo

mul-

multiplizire man die ganze Zahl mit dem Nenner, und dividire das Produkt durch den Zehler: z. B. $4 : \frac{5}{9} = \frac{4}{1} : \frac{5}{9} = \frac{4 \times 9}{5} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$.

§. 52. Zuſatz. Hat man ganze Zahlen an welchen Brüche hangen; ſo mache man ſie nach §. 34. zu Afterbrüchen, und rechne nach der Auflöſung §. 50. z. B. $4\frac{7}{8} : 5\frac{2}{3} = \frac{39}{8} : \frac{17}{3} = \frac{39 \times 3}{8 \times 17} = \frac{117}{136}$.

§. 53. Zuſatz. Wenn man einen gröſſeren Bruch durch einen kleineren dividirt; ſo ſieht man leicht, daß der kleinere in dem größeren ein- oder etlichemal ganz enthalten ſeyn kann. Daher muß in der Diviſion ſolcher Brüche der Quotient größer, als das Dividendum ſeyn.

§. 54. Anmerkung. Die Ausdrücke $\frac{2 : \frac{3}{5}}{7}$ wollen nur ſagen, daß man 2 zuerſt durch $\frac{3}{5}$, und das was herauskömmt nochmal durch 7 dividiren ſoll. $2 : \frac{3}{5} = \frac{2 \times 5}{3}$

§. 51.

§. 51. und $\frac{2\times5}{3}:7=\frac{2\times5}{3\times7}=\frac{10}{21}$. Eben ſo iſt $\frac{3}{5:\frac{3}{4}}=3:\frac{5\times4}{3}=\frac{3\times3}{5\times4}=\frac{9}{20}$.

§. 55. Anmerkung. Nach vollendeter Rechnung mit den Brüchen pflegt man ſie noch auf ihren kleinſten Ausdruck zu bringen §. 40.

Von den Dezimalbrüchen.

§. 56. Erklärung. Ein Produkt von gleichen Faktoren heißt eine Potenz. Z. B. $10\times10=100$. $10\times10\times10=1000$ ſind Potenzen der Zahl 10.

§. 57. Erklärung. Ein Dezimalbruch iſt ein Bruch, deſſen Nenner eine Potenz von 10 iſt. Z. B. $\frac{4}{10}$, $\frac{35}{100}$, $\frac{36}{1000}$.

§. 58. Zuſatz. Die Zahlen unſeres Zahlengebäudes wachſen von der Rechten zur Linken im zehenfachen Verhältniſſe §. 6. folglich nehmen ſie von der Linken zur Rechten

in

in eben dieſem Verhältniſſe ab. Daher muß die nächſte Stelle nach den Einern gegen die Rechte zehentheile, die zweyte hunderttheile, die dritte tauſendtheile ꝛc. bedeuten. Nur muß man die Stelle der Einer mit etwas bezeichnen, um die ganzen Zahlen von den gebrochenen zu unterſcheiden. Dieß Zeichen, welches man das Abſönderungszeichen nennen kann, iſt ein Komma. So heißt z. B. 3,456 ſo viel als $3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000}$. Sind keine ganze Zahlen gegeben; ſo ſetzt man vor das Abſönderungszeichen eine Nulle; z. B. 0,35 heißt: kein Ganzes $+ \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$.

§. 59. Zuſatz. Man pflegt die Dezimalbrüche auch ſo zu erklären: daß ſie Brüche ſind, deren Nenner die Einheit mit ſo viel auf dieſelbe folgenden Nullen iſt als der Zehler Ziffer hat, wo aber der Nenner nicht angeſchrieben wird, weil man ihn aus der Anzahl Ziffer des Zehlers ohnehin kennt. Z. B. es ſollen auf dieſe Art $\frac{2}{100}$ angeſchrieben werden. Weil der Nenner hier zwo Nullen hat, ſo muß der Zehler zwo

Ziffer

Ziffer bekommen; man muß daher der Ziffer 2 des Zehlers eine 0 vorausſetzen, und weil keine Ganzen gegeben ſind, auch eine 0 vor dem Abſönderungszeichen. Dadurch wird $\frac{2}{100}$ auf dieſe Art ausgedrückt $=0,02$ ſeyn. Die Urſache warum die Nulle vor der Zahl 2 geſchrieben werden muß, iſt, weil $0,20 = \frac{20}{100}$ ſeyn würde, da man nur verlangte $\frac{2}{100}$ auf dieſe Art auszudrücken.

§. 60. Zuſatz. Weil $\frac{10}{10}=1$. $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$. $\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}$ iſt § 40. 41. ſo machen hier wie bey ganzen Zahlen zehen Einheiten einer nächſt niedrigeren Stelle eine Einheit ihrer nächſt höheren aus.

§ 61. Zuſatz. Der Werth eines Decimalbruchs ändert ſich nicht, wenn man ihm rechterhand ſo viel Nullen anhängt, als man will. So iſt $0,3=0,30=0,300=0,3000$ ꝛc. denn $0,3=\frac{3}{10}=\frac{30}{100}=\frac{300}{1000}$ §. 39.

§. 62. Aufgabe. Jeden eigentlichen Bruch in einen Dezimalbruch von gleichem Werthe zu verwandeln.

Auflöſung. Man hänge dem Zehler ſo viele Nullen an, als weit die Ziffer des Dezimalbruches reichen ſollen, und dividire auf die gewöhnliche Art; was herauskömmt, iſt der Zehler des Dezimalbruches mit ſo vielen Dezimalſtellen, als man Nullen angehangen hat.

Beyſpiel. $\frac{3}{4} = \frac{3/00}{4} = 0{,}75$ $\frac{1}{5} = \frac{1/0}{5} = 0{,}2$ $\frac{1}{3} = \frac{1/0000}{3} = 0{,}3333 \ldots\ldots$ $\frac{2}{3} = 0{,}666666 \ldots$

Beweis. Man ſoll was immer für einen Bruch durch einen Dezimalbruch von einer beſtimmten Anzahl Dezimalen ausdrücken z. B. $\frac{2}{3}$ bis auf 6 Dezimalen, ſo iſt der Nenner dieſes Bruches gegeben, und $= 1000000$ §. 59. Der Zehler aber unbekannt. Wir wollen ihn indeſſen durch den Buchſtabe x andeuten; ſo iſt $\frac{2}{3} = \frac{x}{1000000}$

und

und wenn mann beyderſeits mit 1000000 multiplizirt $\frac{2000000}{3} = \frac{1000000x}{1000000} = x$. Weil $\frac{1000000}{1000000} = 1$ iſt. Daher wenn man einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln ſoll; ſo darf man dem Zehler deſſelben nur ſo viele Nullen anhängen, als man verlangt, daß der Dezimalbruch Dezimalen haben ſoll, und durch den Nenner dividiren.

§. 63. Anmerkung. Einige Brüche laſſen ſich nicht ganz, und genau durch Dezimalbrüche ausdrücken, wovon $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ §. 62. Beyſpiele ſind. Denn $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$ giebt ohne Ende fort 6 in den folgenden Dezimalſtellen, ſo weit man auch die Diviſion fortſetzt. Mann kann ſich dadurch dem Werthe $\frac{2}{3}$ ſo weit näheren, als man will, und es für nöthig erachtet. Brüche deren Zehler, ſowohl als Nenner große Zahlen ſind, laſſen ſich nach §. 62. bequem durch Dezimalbrüche ausdrücken; beſonders wenn die Näherung nicht weit getrieben werden

darf, und keine große Schärfe in der Rechnung iſt, ſo iſt z. B. $\frac{34567}{54738} = 0,631\ldots.$

§. 64. Aufgabe. Dezimalbrüche zu addiren, oder zu ſubtrahiren.

Auflöſung. Man ſetze die Zahlen ſo, daß die Ziffer von der nämlichen Ordnung untereinander zu ſtehen kommen. Uebrigens behandle man ſie wie ganze Zahlen; nur daß man das Abſönderungszeichen wieder an den nämlichen Ort hinſetzt.

Beyſpiel. Addition. Subtraktion.

Addition	Subtraktion
3,023	
24,98	953,003
346,0035	23,452
374,0065	929,551

Beweis. Iſt der nämliche, wie bey ganzen Zahlen, und im übrigen aus §§. 58. 59. 60. klar.

§. 65. Zuſatz. Wenn in der Zahl, wovon man ſubtrahiren ſoll, gar keine, oder doch weniger Dezimalziffer vorkommen, als in derjenigen, die man ſubtrahiren ſoll; ſo hange man jener ſo viele Nullen an, § 61. als dieſe Dezimalziffer hat, oder als ſie mehr Dezimalziffer hat, als jene, und ſubtrahire ſodann wie gewöhnlich. Z. B. man ſoll von 3 die Zahl 2,134 und von 52,345 die Zahl 11,24789 abziehen.

3,000	52,34500
2,134	11,24789
0,866	41,09711

§. 66. Aufgabe. Dezimalbrüche oder ganze Zahlen, woran Dezimalbrüche hangen, ineinander zu multipliziren.

Aufloͤſung. Man multiplizire ſie wie ganze Zahlen; in dem Produkte aber ſchneide man ſo viele Ziffer von der Rechten gegen die Linke durch das Abſönderungszeichen ab, als in beyden Faktoren Dezimalziffer vorkommen.

Bey=

Beyſpiel. I. 2,34   II. 2,003
 11,6   0,4

1404	0,8012
234	
234	
27,144	

Beweis. Man gebe den Dezimalbrüchen ihre Nenner, und verfahre nach den für gemeine Brüche gegebenen Regeln, ſo erhält man das nämliche. Z. B. $2,34 = \frac{234}{100}$ $11,6 = \frac{116}{10}$ folglich iſt $2,34 \times 11,6 = \frac{234 \times 116}{100 \times 10}$ $= \frac{27144}{1000} = 27,144$.

§. 67. Zuſatz. Wenn es geſchieht, daß das Produkt nicht aus ſo vielen Ziffern beſteht, als in beyden Faktorn Dezimalen vorhanden ſind; ſo muß man nach dem Abſönderungszeichen dem Produkte ſo viele Nullen vorſetzen, als erforderlich iſt, um ſo viele Dezimalziffer zu erhalten, als in beyden Faktorn Dezimalen ſind. Z. B. $0,003 \times 0,2$ giebt, wenn 2 mit 3 multiplizirt wird 6. Weil aber in beyden Faktorn

4 Dezimalſtellen vorkommen; ſo muß man dem Produkte 6 drey Nullen vorausſetzen, um 4 Dezimalſtellen zu erhalten; ſo wird 0,003×0,2=0,0006.

§. 68. Aufgabe. Zahlen worinn Dezimalen vorkommen, durcheinander zu dividiren.

Auflöſung. Man dividire ſie, wie ganze Zahlen, um ſo viel aber das Dividendum mehr Dezimalziffer hat, als der Diviſor, ſo viel ſchneide man in dem Quotienten von der Rechten gegen die Linke durch das Abſönderungszeichen ab. Hat das Dividendum weniger Dezimalen als der Diviſor; ſo kann man ſie nach §. 61. durch angehängte Nullen ſeines Werthes unbeſchadet, so viel vermehren, als man will.

Beyſpiel. 5,7|13,338|2,34

```
    114
    ---
    193
    171
    ---
     228
     228
     ---
       0
```

Be-

Beweis. Weil $5,7 = \frac{57}{10}$ und $13,338 = \frac{13338}{1000}$ iſt, ſo iſt $13,338 : 5,7 = \frac{13338}{1000} : \frac{57}{10} = \frac{13338 \times 10}{57 \times 1000}$ §. 50. $= \frac{13338}{5700} = 2,34$. §. 62.

Von genannten Zahlen.

§. 69. Erklärung. Man heißt genannte Zahlen ſolche, welchen am Ende der Name ihrer Einheit beygeſetzt iſt. Z. B. 25 Gulden 37 Kreuzer.

§. 70. Anmerkung. Wer das bisher Erklärte gehörig verſteht, dem können wohl die Rechnungsarten mit genannten Zahlen keine Schwierigkeit machen. Wenn man nur weis wie viele Einheiten einer nächſt niedrigern Gattung, eine Einheit von einer nächſt höheren ausmachen. Z. B. unſere Geldrechnungen geſchehen in Gulden, Kreuzern, Pfenningen, Hellern. 1 Gulden iſt = 60 Kreuzern 1 Kreuzer = 4 Pfenningen 1 Pfenning = 2 Hellern. Beyſpiele können zureichen die ganze Sache zu erklären. Um

aber diejenige zu verſtehen, die ich ſo-gleich beybringen werde, muß ich hier noch beyfügen, daß die Tagwerke, wovon die Rede ſeyn wird, 400 Quadratruthen enthalten, jede Quadratruthe zu 100 Quadratfuß gerechnet. Der Kubikfuß hält 1000 Kubukzolle. Die Klafter hat 126 Kubikfuß, weil ich voraus ſetze, daß ſie 6 Fuß breit und hoch, und die Scheiterlänge 3½ Fuß ſeye.

§. 71. Exempel für die Addition.

	132 Kubikfuß	857 Kubikzoll
	112	455
	98	12
Sume	343 —	324 —

Der körperliche Innhalt eines Baumſtammes iſt 132 Kubikfuß 857 Kubikzolle. Eines anderen 112 Kubikfuß 455 Kubikzoll, und eines dritten 90 Kubikfuß und 324 Kubikzoll, Wie viel machen ſie zuſammen an Kubikfuſſen und Zollen? Man rechne die Zolle zuſammen. Die Tauſender von Zollen; weil 1000 Kubikzolle einen Kubikfuß betragen,

gen, §. 70. rechne man zu den Kubikfußen; ſo iſt's geſchehen, was man verlangte.

§. 72. Exempel für die Subtraktion.

	Tagw.	Quadratr.	Quadratf.
	150	200	88
	20	344	90
Unter.	129	255	98

Der Flächeninnhalt eines Waldbodens mit Einſchluß aller Holzwieſen, Weyher ꝛc. beträgt 150 Tagwerke 200 Quadratruthen 88 Quadratſchuhe. Die Holzwieſen, Weyher ꝛc. allein machen zuſammen 20 Tagwerke 344 Ruthen 90 Fuß; wie groß iſt der eigentliche Holzboden? — Weil ſich die 90 Quadratfuß von den 88 nicht abziehen laſſen, ſo muß man von den 200 Quadratruthen eine entlehnen; weil aber jede = 100 Quadratfuß iſt, ſo hat man ſodann 188 Quadratfuſſe, wovon ſich 90 abziehen laſſen. Von den 199 Quadratruthen, welche geblieben ſind, laſſen ſich die 344 ebenfalls nicht abziehen. Man entlehne daher eine Einheit von den Jocharten, weil jedes Jochart §. 70.

=

=400 Quadratruthen iſt, ſo hat man 599 Quadratruthen, wovon ſich die 344 ſubtrahiren laſſen. Endlich ziehe man noch von den 149 Tagwerken, welche geblieben ſind, die 20 Tagwerke weg; ſo hat man den ganzen Unterſchied, welcher den eigentlichen Waldboden ausmacht.

§. 73 Exempel für die Multiplikation.

```
 4 Guld.   28 Kr.
56         56
-------   -------
224 Guld. 168 Kr.
          140
          -----
     60 | 1568 | 26
        | 120  |
          -----
          368
          360
          -----
            8

    224
     26
   ---------
Produ. 250fl. 8kr.
```

Wenn die Klafter 4 Gulden 28 Kreuzer koſtet, was ſind 56 Klaftern werth? Man multiplizire ſowohl die Kreuzer als Gulden mit 56, das Produkt aus den Kreuzern in 56, dividire man durch 60, ſo wird der Quotient 26 die Gulden geben, welche die 1568 Kreuzer ausmachen, der Reſt 8 aber Kreuzer anzeigen.

§. 74. Exempel für die Diviſion. Wenn die Klafter 126 Kubikfuß hält, und 4 Gulden 28 Kreuzer gilt, was koſteſt der Kubikfuß? Man mache die 4 Gulden zu Kreuzer, indem man ſie mit 60 multiplizirt. Zu dem Produkt 240 addire man die 28 Kreuzer, und dividire die Summe durch 126, ſo kommen 2 Kreuzer auf jeden Kubikfuß, und überdieß noch 16 Kreuzer auf alle 126 zu vertheilen. Macht man die 16 Kreuzer zu Hellern, indem man ſie mit 8 multiplizirt, und dividirt 16 × 8 = 128 abermal durch 126, ſo trift noch auf jeden Kubikfuß 1 Heller, wenn man den Reſt von 2 Hellern außer Acht läßt.

4 Guld. 28 Kr.
60
240 + 28 = 268 Kr.

126 | 268 | 2
252
16

16 Kr.
8

126 | 128 Hell. | 1
126
2

Von

Von der Buchſtabenrechnung.

§. 75. **Willkührlicher Satz.** Man drücke eine Zahl überhaupt oder unbeſtimmte Größen durch die Buchſtaben des Alphabets aus: ſo wird nach den in den Vorerinnerungen angenommenen Zeichen $a+b$ eine Summe, $c-d$ eine Differenz, $a \times b$ oder $a.b$ oder auch ab ohne einiges Zeichen zwiſchen den Buchſtaben, ein Produkt, $x:y$ oder $\frac{x}{y}$ einen Quotienten überhaupt anzeigen. Schließt man Größen in ein Parentheſis ein, ſo hat das vorgeſetzte Zeichen auf alle Größen einen Bezug, die eingeſchloſſen ſind. Z. B. $a-(b+c-d)$ heißt, man ſoll alles was innerhalb der Parentheſis iſt, von a abziehen. $a(m-n)$ will ſagen, alles, was ſich innerhalb der Parentheſis befindet, ſoll mit a multiplizirt werden. Setzt man der erſten Größe kein Zeichen vor, ſo verſteht man allzeit + darunter $a-b$ iſt ſo viel als $+a-b$.

§. 76. Willkührlicher Satz. Wenn eine Größe ein= oder etlichemal zu ſich ſelbſt addirt wird, ſo giebt es eine Verkürzung im Ausdrucke. So iſt z. B. $a+a=2a$ $b+b+b+b=4b$. Denn man kann durch eine der Größe vorgeſetzte Zahl anzeigen, wie oft man die Größe hat. Die Zahl heißt Koeffizient, und wenn der Größe keiner vorgeſetzt wird, ſo iſt derſelbe $=1$. Z. B. C iſt $=1C$.

§. 77. Willkührlicher Satz. Auch bey der Multiplikation läßt ſich eine Verkürzung im Ausdrucke anbringen, wenn die nämliche Größe öfter mit ſich ſelbſt multiplizirt wird. Z. B. $C \times C \times C$ kann durch C^3 ausgedrückt werden. Denn wenn alle Faktorn gleich ſind, ſo kann man oben rechterhand eine Zahl hinſchreiben, welche die Menge derſelben anzeigt. Man nennt dieſe Zahl Exponent. Iſt keiner ausgedrückt, ſo iſt derſelbe $=1$. oder m iſt ſo viel als m^1.

§. 78. Zuſatz. Der Koeffizient und Exponent unterſcheiden ſich dadurch ſchon, daß jener linkerhand vor der Größe, dieſer rechterhand ober derſelben hingeſchrieben wird. Eigentlich aber zeigt der Koeffizient an, daß die Größe, vor welcher er ſteht, ſo vielmal zu ſich ſelbſt addirt iſt, als er Einheiten hat, weniger einer, und der Exponent, daß die Größe ſo oft mit ſich ſelbſt multiplizirt iſt, als er Einheiten hat, weniger einer. So kommen z. B. in $b+b+b=3b$ zwo Additionen, in $C\times C\times C=C^3$ zwo Multiplikationen vor.

§ 79. Erklärung. Wenn Größen in der Rückſicht, in der ſie betrachtet werden, wechſelweis einander vermindern; ſo heißen ſie entgegengeſetzte oder poſitive, und negative Größen, z. B. Schulden und Vermögen.

§. 80. Zuſatz. Aus der Natur dieſer Größen folgt alſo von ſelbſt, daß, wenn man die Poſitiven durch das Zeichen der Ad-

di-

dition oder + ausdrückt, die Negativen durch das Zeichen der Subtraktion oder — angezeigt werden müßen. Z. B. zehen Gulden Vermögen durch + 10, und ſieben Gulden Schulden durch — 7. Wer alſo zehen Gulden beſitzt, und, ſieben ſchuldig iſt, der hat + 10 — 7 = 3. Oder nach Abzug ſeiner Schulden noch 3 Gulden Vermögen. Hat man ſo viel Schulden als Vermögen, ſo hat man eigentlich Nichts. So iſt z. B. + 3 — 3 = 0. Sind die Schulden größer als das Vermögen, ſo bleiben Schulden übrig. So iſt z. B. + 15 — 20 = — 5. Das iſt. wer 15 Gulden Vermögen aber auch 20 Gulden Schulden hat, bleibt 5 Gulden ſchuldig; auch wenn er mit den 15 Gulden Vermögen von den 20 Gulden Schulden 15 tilgt.

§. 81. Zuſatz. Aus dem vorhergehenden Zuſatze iſt klar daß man bey der Addition zwoer entgegengeſetzten Größen, eigentlich nur die kleinere von der größeren abziehen, und zu dem Reſte das Zeichen der

grö-

größeren ſetzen müſſe. Daß die Summe von mehreren poſitiven Größen poſitiv, ſo wie die von negativen negativ ſeye, iſt für ſich klar. Wenn daher ſowohl mehrere poſitive als negative Größen gegeben ſind, ſo ſuche man ihre Summen, ziehe die kleinere von der größeren ab, und ſetze zum Reſt das Zeichen der größeren.

§. 82. Aufgabe. Größen, welche mittels Buchſtaben, Koeffizienten, und Exponenten ausgedruckt ſind, und durch die Zeichen + und — zuſammen hangen, zu addiren.

Exempel.

$$a^4+5a^2+3a-5b^2+6cd-6x+4z.$$
$$2a^8+4a^2b+2a-2b^2-4cd+3x+y.$$
$$\text{Su.}=a^4+2a^8+5a^2+4a^2b+5a-7b^2+2cd$$
$$-3x+y+4z.$$

Aufloͤſung. I. Wenn bey den einzelnen Ausdrücken nach den Zeichen + oder — und ihren Koeffizienten verſchiedene Größen folgen, ſo ſetze man dieſelben nach der Ordnung des Alphabets an, wie ſie ſind.

II. Folgen bey den einzelnen Ausdrücken auf die Zeichen und Koeffizienten einerley Größen, ſo ſehe man, ob die Zeichen gleich oder ungleich ſind.

A. Bey gleichen Zeichen addire man die Koeffizienten, und ſetze ihre Summe ſammt dem gemeinſchaftlichen Zeichen der Größe vor.

B. Sind die Zeichen ungleich, ſo ſubtrahire man den kleineren Koeffizienten von dem größeren, und ſetze den Unterſchied der Größe nebſt dem Zeichen des größeren Koeffizienten vor.

Beweis. Die Addition mit entgegengeſetzten Größen iſt geſchehen, wenn man die einzelnen Ausdrücke in einer Reihe anſchreibt, wie ſie gegeben ſind. Die Auflöſung enthält eigentlich bloß die Regeln, um die Summe auf den kleinſten Ausdruck zu bringen. Man ſieht aber leicht ein, daß, weil z. B. $+y$ und $+z$ nicht einerley bedeuten, $+1y$ und

$+4z$

$+4z$ zuſammen weder $5y$ noch $5z$ ausmachen; ſondern $+y+4z$. Eben dieſes gilt in Rückſicht von a^4+2a^3 und $5a^2+4a^2b$, weil weder a^4 und a^3, noch a^2 und a^2b einerley ſind. Das Uebrige iſt aus den §§. 76. 80. 81. klar.

§. 83. Lehrſatz. Die Subtraktion bey entgegengeſetzten Größen geſchieht, wenn man in derjenigen, die abgezogen werden ſoll, die Zeichen + in — und — in + verwandelt.

Beweis. I. Daß man $a-b$ erhält, wenn man $+b$ von $+a$ abzieht, erhellet aus §. 75. Daß aber der Unterſchied zwiſchen $+a$ und $-b=a+b$ ſeye, könnte Anfängern zweifelhaft ſcheinen. Allein da der Unterſchied, denn ich d nennen will, ſammt der Größe $-b$, die abgezogen werden ſoll, der a, wovon man abzieht, gleich iſt §. 12, ſo muß $a=d-b$, folglich, wenn man beyderſeits $+b$ addirt, $a+b=d-b+b=d$ ſeyn.

II. Wenn $+b-c$ von $+a$ abgezogen werden ſoll, und man ſetzt $a-b$, ſo hat man den Unterſchied zwiſchen b und a. Aber da nicht b, ſondern um c weniger, als b beträgt, hätte abgezogen werden ſollen, ſo hat man offenbar um c zuviel abgezogen. Man muß daher noch $+C$ zu $a-b$ hinzuſetzen, um den eigentlichen Unterſchied zwiſchen $+a$ und $b-c$ zu finden. Folglich iſt $a-(b-c)=+a-b+c$.

§. 84. Aufgabe. Ausdrückungen wie die des §. 82. voneinander zu ſubtrahiren.

Exempel.

$$\begin{array}{l} a^2+3a-4b+6c-d+z \\ a^2b-4a-2b+2c-d+x \\ \hline a^2+3a-4b+6c-d+z \\ -a^2b+4a+2b-2c+d-x \\ \hline \text{Unterſch.}=a^2-a^2b+7a-2b+4c-x+z. \end{array}$$

Auflöſung. I. Man verändere alle Zeichen derjenigen Größe, welche abgezogen werden

den ſoll, + in — und — in + §. 83, und II verfahre ſodann wie bey der Addition §. 82.

§. 85. Lehrſatz. Wenn beyde Faktorn einerley Zeichen haben, ſo iſt ihr Produkt poſitiv, bey verſchiedenen Zeichen aber negativ.

Beweis. Die zween Faktorn ſeyen a und b alſo ihr Produkt ab; ſo giebt es in Rückſicht der Zeichen vier Fälle I. wenn + a mit + b II. — a mit — a III. + a mit — b IV. — a mit + b zu multipliziren iſt. Weil der eine Faktor die Einheit ſo oft als das Produkt den andern enthält §. 17, ſo erhält man

I. $\frac{+a}{+1} = \frac{+ab}{+b}$ II. $\frac{-a}{+1} = \frac{+ab}{-b}$

III. $\frac{+a}{+1} = \frac{-ab}{-b}$ IV. $\frac{-a}{+1} = \frac{-ab}{+b}$.

Im

Im erſten Falle muß die Einheit, die man poſitiv annimmt, in dem einen Faktor +a ſo oft ſtecken, als der andere +b in dem Produkte ab. Da nun die poſitive Einheit in dem poſitiven Faktor a ſelbſt enthalten iſt, ſo muß eben ſo auch der andere oder +b in dem dem Produkte ſelbſt enthalten, folglich das Produkt ab poſitiv ſeyn.

Im zweyten Falle kann der negative Faktor oder —a die poſitive Einheit nicht ſelbſt enthalten, wohl aber die entgegengeſetzte oder —1. Daher darf auch das Produkt den andern Faktor oder —b nicht ſelbſt, ſondern ſein entgegengeſetztes enthalten, folglich muß es poſitiv ſeyn. Auf eine ähnliche Art und durch ähnliche Schlüſſe erhellet die Richtigkeit des Lehrſatzes für den IIIten und IVten Fall.

§. 86. Anmerkung. Man nimmt die Einheit willkührlich poſitiv an. Wollte man ſie negativ annehmen, ſo würden gleiche Zeichen —, und ungleiche + geben.

Ueber-

Ueberhaupt geben gleiche Zeichen das Zeichen der Einheit, welche man annimmt, ungleiche aber das Zeichen der entgegengeſetzten. Da nun die Einheit entweder + oder — angenommen werden muß; ſo iſt der Satz richtig, weil er die poſitive Einheit vorausſetzt.

§. 87. **Erklärung.** Ein Produkt von gleichen Faktorn heißt überhaupt eine Potenz §. 56. von zwey gleichen Faktorn ein Quadrat, von drey ein Kubus, von vier die vierte Potenz ꝛc. Jeder von den gleichen Faktorn heißt die erſte Potenz oder die Wurzel.

§. 88. **Lehrſatz.** Potenzen von der nämlichen Wurzel werden miteinander multiplizirt, wenn man ihre Exponenten addirt.

Beweis. Z. B. $a^3 \times a^5 = a^8$. Denn $a^3 = aaa$. $a^5 = aaaaa$ §. 77. Folglich $a^3 \times a^5 = aaa \times aaaaa = aaaaaaaa = a^8$ §. 77.

§. 89. Zuſatz. $a^m \times a^n$ iſt $= a^{m+n}$ es mag m und n ſeyn was es will. Denn das Produkt enthält ſo viele Faktorn jeden $= a$ als m und n anzeigen, alſo $m+n$ §. 77.

§. 90. Zuſatz. $a^m \times a^m = a^{m+m} = a^{2m}$. oder der Exponent des Quqdrats iſt doppelt ſo groß als der ſeiner Wurzel.

§. 91. Zuſatz. $a^m \times a^m \times a^m = a^{3m}$ oder der Exponent des Kubus iſt dreymal ſo groß, als der von ſeiner Wurzel.

§. 92. Zuſätz. Alſo iſt $(a^m)^2 = a^{2m}$ $(a^m)^3 = a^{3m}$ und überhaupt $(a^m)^n = a^{mn}$. Daher braucht man nur den Exponenten der Wurzel m mit derjenigen Zahl zu multipliziren, welche anzeigt, zu welcher Potenz die Größe erhoben werden ſoll, wenn man den Exponenten der Potenz finden will.

§. 93. Willkührlicher Satz. Das Wurzelzeichen iſt wie in den Vorerinnerungen $\sqrt{}$. und zeigt an, daß aus der auf daſſelbe folgen

genden Größe eine Wurzel gezogen werden ſoll. Setzt man keine Zahl in das Wurzelzeichen hinein; ſo bedeutet es eine Quadratwurzel. Für Kubikwurzeln ſchreibt man 3, für die nte Wurzel n in das Zeichen. So bedeutet z. B. $\sqrt{a^2}$ die Quadratwurzel von a^2, und $\sqrt[3]{b^3}$ die Kubikwurzel von b^3. $\sqrt[n]{c}$ die nte Wurzel aus c.

§. 94. Zuſatz. Weil der Exponent des Quadrats 2mal, §. 90. der Exponent des Kubus 3mal, §. 91. der Exponent der nten Potenz nmal, ſo groß iſt, §. 92. als der ihrer Wurzeln, ſo findet man den Exponenten der Quadratwurzel, wenn man den Exponenten des Quadrats durch 2 dividirt, den Exponenten der Kubikwurzel, wenn man den Exponenten des Kubus durch 3 dividirt, den Exponenten der nten Wurzel wenn man den Exponenten der Potenz durch n dividirt. So iſt $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$. $\sqrt[3]{y^6} = y^{\frac{6}{3}} = y^2$. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

§. 95.

§. 95. Zuſatz. Da die Ausdrücke $\sqrt[3]{x^5}$ und $x^{\frac{5}{3}}$ einander gleich ſind §. 94; ſo kann man einen ſtatt des andern ſetzen, auch einen in den andern verwandeln. Will man z. B. das Wurzelzeichen wegſchaffen, ſo dividire man den Exponenten der Größe, welche nach demſelben ſteht, durch die Zahl, welche ſich in den Wurzelzeichen befindet. Will man ſtatt des gebrochenen Exponenten das Wurzelzeichen brauchen, ſo ſetze man der Größe das Wurzelzeichen vor, ſchreibe den Nenner in daſſelbe hinein, und laſſe den Zehler, wo er iſt.

§. 96. Aufgabe. $3a^2b - 5b^3x$ mit $4a^3c - 6b^2z$ zu multipliziren.

$$\begin{array}{c} 3a^2b - 5b^3x \\ 4a^3c - 6b^2z \\ \hline 12a^5bc - 20a^3b^3cx - 18a^2b^3z + 30b^5xz. \end{array}$$

Auflöſung. Man multiplizire alle Theile des einen Faktors mit jedem Theile des andern nach folgenden Regeln.

I.

I. Wenn die einzelnen Theile gleiche Zeichen haben; ſo ſetze man vor ihren Produkten +, bey ungleichen Zeichen —. §. 85.

II. Die Koeffizienten multiplizire man in einander.

III. Wenn in den Produkten der einzelnen Theile Potenzen von der nämlichen Größe vorkommen, ſo addire man nach §. 88. ihre Exponenten.

IV. Größen, welche durch verſchiedene Buchſtaben ausgedrückt ſind, ſetze man nach der Ordnung des Alphabets ohne Zwiſchenzeichen. §. 75.

Alle Produkte der einzelnen Theile in einander mit ihren Zeichen, die ſie nach I. erhalten, in einer Reihe angeſchrieben, geben das ganze Produkt. Welches offenbar entſteht, wenn man alle Theile des einen Faktors, mit allen Theilen des andern multiplizirt.

Der

Der Beweis beruht auf den angeführten §§. die Regel II. für die Koeffizienten iſt deswegen richtig, weil die Koeffizienten Faktorn ſind, oder z. B. 3a×4b = 3×a×4×b = 3×4×a×b = 12 ab iſt.

§. 97. Anmerkung. Wenn man die §. 96. gegebenen Regeln der Multiplikation mit dem Beyſpiele vergleicht, welches der Auflöſung vorgeſetzt iſt; ſo wird man ohne weitläuftige Erklärung ihre Anwendung ganz leicht gewahr; ſo daß ich mich hierüber aufzuhalten keine Urſache habe. Uebrigens enthält die Auflöſung alle Regeln, die man in Rückſicht der Zeichen, Koeffizienten, Exponenten, und Buchſtaben bey der Multiplikation beobachten muß, ſo wie das gegebene Beyſpiel ihre Anwendung.

§. 98. Lehrſatz. Wenn Potenzen von der nämlichen Wurzel, eine durch die andere zu dividiren ſind; ſo darf man nur den Exponenten des Diviſors von dem Exponenten das Dividendi abziehen.

Be-

Beweis. $\frac{a^7}{a^4} = a^{7-4} = a^3$. Denn

$\frac{a^7}{a^4} = \frac{aaaaaaa}{aaaa} = \frac{aaaa}{aaaa} \times aaa = 1\,aaa$

$= a^3$. §. 77. Oder da die Exponenten die Menge der gleichen Faktorn angeben, ſo heben ſich im Dividendo ſo viele auf, als der Diviſor hat, folglich bleiben in dem Quotienten nur ſo viele, als das Dividendum mehr hat, als der Diviſor.

§. 99. Zuſatz. Weil $1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1}$ §. 77. $= a^{1-1} = a^0$ ſo iſt $a^0 = 1$. Oder jede Größe zur Potenz 0 erhoben iſt $= 1$.

§. 100. Zuſatz. Weil $\frac{1}{b^2} = \frac{1 b^3}{b^2 \times b^3}$ §. 39. $= \frac{b^3}{b^5} = b^{3-5} = b^{-2}$ iſt; ſo iſt $\frac{1}{b^2} = b^{-2}$. Oder Potenzen mit negativen Exponenten ſind Brüche, deren Zehler allzeit 1, und die Nenner eben dieſelben Potenzen, aber mit poſitiven Exponenten ſind.

§. 101.

§. 101. Zuſatz. $\frac{ab}{a} = b$. $\frac{amn}{an} = m$ weil ſowohl $\frac{a}{a}$ als $\frac{an}{an} = 1$ iſt. Eben ſo iſt $\frac{ab - ac}{a} = \frac{a(b - c)}{a} = b - c$. Und $\frac{ab - ac}{am - an} = \frac{a(b - c)}{a(m - n)} = \frac{b - c}{m - n}$.

Wenn daher die nämliche Größe in allen Theilen des Dividendi ſowohl als des Diviſors vorkömmt; ſo kann man ſolche Ausdrücke als Brüche betrachten, und nach §. 40. auf einen kleinern Ausdruck bringen; indem man alles durch die allen Gliedern gemeinſchaftliche Größe dividirt.

§. 102. Lehrſatz. Gleiche Zeichen geben in der Diviſion +, ungleiche —.

Beweis. Es ſey das Dividendum D, der Diviſor d, der Quotient q. Weil die Einheit im Quotienten ſo oft ſteckt, als der Diviſor in den Dividendo §. 23; ſo giebt es

hier

hier wie §. 85. in Rückſicht der Zeichen folgende Vorfälle.

$$\text{I. } \frac{+D}{+d} = \frac{+q}{+1} \qquad \text{II. } \frac{-D}{-d} = \frac{+q}{+1}.$$

$$\text{III. } \frac{+D}{-d} = \frac{-q}{+1} \qquad \text{IV. } \frac{-D}{+d} = \frac{-q}{+1}.$$

Macht man ähnliche Schlüſſe, wie die von §. 85. ſind; ſo wird man leicht einſehen, daß der Quotient poſitiv ſeyn muß, wenn das Dividendum ſowohl als der Diviſor gleiche Zeichen haben; negativ aber, wenn ihre Zeichen ungleich ſind.

§. 103. Aufgabe. Ausdrückungen die denen des Beyſpiels §. 96. ähnlich ſind, zu dividiren.

Diviſ.	Dividend.	Quotient.
$+2abc$	$4a^3bc-2abc+12a^2b^3z$	$+2a^2-1+6ab^2z$

Auflöſung I. Fall. Wenn der Diviſor nur aus einer Größe beſteht, die das Zeichen + oder — vor ſich hat; ſo dividire man jedes Glied des Dividendi durch den gegebenen Diviſor nach folgenden Regeln.

I. Wenn die Zeichen gleich ſind, ſo ſetze man den einzelnen Quotienten +, bey ungleichen Zeichen, — vor §. 102.

II. Die Koeffizienten dividire man wie Zahlen.

III. Sind die Buchſtaben gleich; ſo ſubtrahire man die Exponenten nach §. 98. iſt ihre Differenz =0. So ſetze man 1 nach §. 99. dafür hin, wenn keine andere Größe vorkömmt, außerdem aber laſſe man dieſen Buchſtabe in dem Quotienten ganz weg.

IV. Sind die Buchſtaben in den einzelnen Theilen und dem Diviſor ungleich; ſo ſetze man dieſelben untereinander in der Geſtalt

ſtalt eines Bruches §. 75; ſo iſt die Diviſion geſchehen.

II. Fall. Wenn der Diviſor aus mehrern Größen beſteht, die das Zeichen + oder — vor ſich haben; ſo beobachtet man die nämlichen Regeln in Rückſicht der Zeichen, Koeffizienten, Exponenten, Buchſtaben wie im erſten Falle, und dividirt übrigens auf eine ähnliche Art, wie bey Zahlen gelehrt iſt worden, welches ſich aber durch Beyſpiele am beſten erläutern läßt.

Diviſor.	Dividend.	Quotus.
$3ac^2-2bx^3$	$27a^3c^6-8b^3x^9$	$9a^2c^4+6abc^2x^3+4b^2x^6$.

$$27a^3c^6-18a^2bc^4x^3=A$$
$$-27a^3c^6+18a^2bc^4x^3=B$$
$$\overline{+18a^2bc^4x^3-8b^3x^9=C}$$
$$+18a^2bc^4x^3-12ab^2c^2x^6=D$$
$$-18a^2bc^4x^3+12ab^2c^2x^6=E$$
$$\overline{+12ab^2c^2x^6-8b^3x^9=F}$$
$$+12ab^2c^2x^6-8b^3x^9=G$$
$$-12ab^2c^2x^6+8b^3x^9=H$$
$$\overline{\qquad\qquad 0. \qquad\qquad}$$

Man ſetze, wie oft der erſte Theil des Diviſors $3ac^2$ in dem erſten Theile des Dividendi $27a^3c^6$ enthalten ſeye. Den Quotienten $9a^2c^4$ ſetze man an ſeine Stelle rechterhand. Das Produkt aus dieſen Quotienten in den ganzen Diviſor $3ac^2 - 2bx^3 = A$ §. 96. ziehe man §. 83. von dem Dividendo ab. Den Reſt $= C$ oder vielmehr deſſen erſtes Glied $+18a^2bc^4x^3$ dividire man abermal durch $3ac^2$ und ſetze den Quotienten $+6abc^2x^3$ zu dem vorigen $9a^2c^4$ hin. Das Produkt aus dieſen Quotienten in den ganzen Diviſor oder $3ac^2 - 2bx^3 = D$ ziehe man von dem Reſte $= C$ ab, ſo bleibt noch F übrig, welches oder eigentlich deſſen erſtes Glied $12ab^2c^2x^6$ durch $3ac^2$ dividirt, $4b^2x^6$ zum Quotienten giebt, den man zu den ſchon gefundenen hinſchreibt. Wird noch das Produkt aus $4b^2x^6$ in $3ac^2 - 2bx^3 = G$ von F abgezogen, ſo bleibt nichts im Reſte, und der Quotient wenn $27a^3c^6 - 8b^3x^9$ durch $3ac^2 - 2bx^3$ dividirt wird, iſt genau $= 9a^2c^4 + 6abc^2x^3 + 4b^2x^6$.

Der

Der Beweis was die Zeichen, Exponenten und Buchſtaben betriſt, beruht auf den angeführten §§. und iſt im übrigen von dem, welcher bey Zahlen §. 24. gegeben worden iſt, nicht verſchieden.

§. 104. Anmerkung. Die wenigſten Ausdrückungen ſind ſo beſchaffen, daß ſie ſich, wie die des Beyſpiels vom zweyten Falle genau dividiren laſſen. Man muß ſich daher meiſt mit Reduktionen, die denen von §. 101. ähnlich ſind, begnügen.

§. 105. Anmerkung. Wer das, was bisher von der Buchſtabenrechnung gelehrt iſt worden, gehörig inne hat, dem können Brüche, die durch Buchſtaben ausgedrückt ſind, keine Schwierigkeit machen. Man bringt ſie unter einerley Benennung, man addirt, man ſubtrahirt, man multiplizirt und dividirt ſie auf eben die Art, wie Brüche, die mit Zahlen ausgedrückt ſind; nur daß man die der Buchſtabenrechnung eigenen Regeln für die Zeichen, Koeffizienten, Exponen-

ponenten ꝛc. beobachtet. Einige Beyſpiele können die Sache erläutern.

$\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ wenn ſie unter einerley Benennung gebracht ſind, geben $\frac{ad}{bd}, \frac{bc}{bd}$ §. 42. ihre Summe oder Differenz $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$ iſt alſo $= \frac{ad \pm bc}{bd}$ §. 43. 45. ihr Produkt $\frac{ac}{bd}$ §. 47. und der Quotient $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

§. 50. $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$. $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$.

Wenn man daher Brüche zum Quadrate oder Kubus erhebt; ſo muß dieſes ſowohl bey dem Zehler als Nenner geſchehen. Folglich auch, wenn man aus Brüchen die Quadrat- oder Kubikwurzel ziehen will; ſo muß ſie aus dem Zehler ſowohl, als Nenner gezogen werden.

Von

Von dem Quadrate und Kubus und von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel.

§. 106. Lehrſatz. Wenn die Wurzel zwey Theile hat; ſo beſteht ihr Quadrat, aus den Quadraten beyder Theile, und aus dem doppelten Produkte des erſten Theils in dem zwoten.

Beweis. Die zween Theile ſeyen a und b; ſo iſt $(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b)$ $= a^2 + 2ab + b^2$ wenn man gehörig nach

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

§. 96. multiplizirt. Alſo beſteht das Quadrat aus dem Quadrat des erſten Theils oder a^2, aus dem Quadrate des zweyten Theils oder b^2, und dem doppelten Produkte beyder Theile ineinander oder $2ab$.

§. 107. Anmerkung. Man braucht bey der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln, die Quadrate und Kubus der

Zah-

Zahlen von 1 bis 10 zu wiſſen. Dazu dient folgendes Tåfelchen:

Wurzel.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrat.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Kubus.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

§. 108. Zuſatz. Wenn a und b jedes der neun Zahlzeichen unbeſtimmt bedeuten; ſo zeigt $10a+b$ eine Zahl von a Zehnern und b Einern an. Das Quadrat von $10a+b$ oder $(10a+b)^2$ iſt $= 100 \times a^2 + 2ab \times 10 + b^2$ §. 96. daher fångt das Quadrat vom Zahlzeichen der Einer bey den Einern, das doppelte Produkt vom Zahlzeichen der Einer in das der Zehner bey den Zehnern, und das Quadrat vom Zahlzeichen der Zehner bey den Hunderten an.

§. 109. Zuſatz. Weil $\frac{2ab}{2a} = b$ iſt; ſo erhålt man den zweyten Theil b, wenn man das doppelte Produkt aus dem Zahlzeichen der Einer in das der Zehner durch das doppelte vom Zahlzeichen der Zehner dividirt.

§. 110.

§. 110. Zuſatz. Sind a und b am größten oder beyde $a=b=9$; ſo iſt

$$100a^2 = 81 \times 100 = 8100.$$
$$2ab \times 10 = 2 \times 81 \times 10 = 1620$$
$$b^2 = 81 = 81$$
$$\text{Summe} = 9801.$$

Folglich reicht das Quadrat der Einer nicht weiter als bis in die Zehner; das doppelte Produkt der Zehner in die Einer, und das Quadrat der Zehner nie weiter als bis in die Tauſender, und auch alles zuſammen nicht über die Tauſender. Wenn daher die Wurzel aus Zehnern und Einern beſteht; ſo hat das Quadrat nie mehr als vier Ziffer, ob es ſchon, wenn die Menge der Zehner klein iſt, auch nur drey haben kann, wie z. B. wenn $10a+b=12$ und alſo $12 \times 12 = 144$ iſt.

§. 111. Zuſatz. Wenn a jede Zahl überhaupt, und b jedes der neun Zahlzeichen bedeuten; ſo iſt $10a+b$ eine Zahl, die aus einer Menge Zehnern $=a$ und aus einer Menge Einern $=b$ beſteht. Das doppelte Produkt von $10a$ in b fängt eben ſo

wie

wie §. 108. bey den Zehnern, und das Quadrat der Zehner bey den Hunderten an. Auch findet man b eben ſo wie §. 109.

§. 112. Aufgabe. Aus einer Zahl die aus 3 bis 4 Ziffern beſteht, die Quadratwurzel zu ziehen.

```
32 | 49 | 57
25
 74
 10
 70
  49
  49
  --
   0
```

Auflöſung. I. Man theile die Zahl in Klaſſen, jede von zwoen Ziffern von der Rechten gegen die Linke. Die erſte Klaſſe linkerhand kann auch nur eine Ziffer haben. §. 107.

II. Man betrachte die Zahl als ein Quadrat, deſſen Wurzel aus Zehnern und Einern beſteht, §. 110. Weil das Quadrat der Zehner bey den Hunderten anfängt §. 108. ſo muß es in den 32 ſtecken. Es kann daher kein anderes als 25 ſeyn §. 107. Was darüber iſt, gehört zu dem doppelten Produkte

dukte der Zehner in die Einer §. 110. Die Wurzel von 25, das iſt, 5 ſetze man als den erſten Theil in die Stelle der Wurzel vom Ganzen, und

III. Ziehe das Quadrat derſelben 25 von 32 ab.

IV. Zu dem Reſte 7 ſetze man noch die nächſte Ziffer 4 der folgenden Klaſſe, weil da das doppelte Produkt der Zehner in die Einer anfängt; wenn ſchon auch etwas von dem Quadrate der Einer dabey ſeyn mag, §. 110. und

V. Dividire 74 durch den gefundenen doppelten erſten Theil oder $2 \times 5 = 10$. ſo giebt der Quotient 7 den zweyten Theil oder die Einer der Wurzel §. 109.

VI. Multiplizirt man den doppelten erſten Theil 10 mit dem zweyten der Wurzel 7; ſo erhält man das doppelte Produkt aus dem erſten in den zweyten Theil $= 70$. welches von

74 abgezogen noch 4 übrig läßt, die zum Quadrate der Einer gehören.

VII. Setzt man zu dieſen 4 noch die letzte Ziffer der zwoten Klaſſe 9 herab; ſo muß das Quadrat der Einer, welches da anfängt §. 108, darinn enthalten ſeyn. Es iſt aber das Quadrat der 7 Einer = 49 §. 107. zieht man es von 49 ab; ſo bleibt nichts im Reſte, die Quadratwurzel aus der Zahl 3249 iſt alſo genau = 57.

§. 113. **Anmerkung.** Anſtatt daß man zu dem Reſte 7 der nach Abzug des Quadrats vom erſten Theile geblieben iſt, nur die nächſte Ziffer 4 allein herabſetzt, kann man ſogleich die ganze zwote Klaſſe herunternehmen; auch den zweyten Theil 7 rechterhand unter die Stelle der Einer neben dem doppelten erſten, womit man dividirt, hinſchreiben, und alles mit dem zweyten Theil multipliziren.

```
32 | 49 | 57
25
 749
 107
 749
------
   0
```

ren. Man erhält ſo das doppelte Produkt der Einer in die Zehner, und das Quadrat der Einer auf einmal, und es giebt einige Verkürzung im Rechnen.

§. 114. Zuſatz. Wenn man die gefundene Wurzel mit ſich ſelbſt multiplizirt; ſo muß daß Quadrat herauskommen; §. 87. das dient alſo der Rechnung zur Probe.

§. 115. Aufgabe. Aus einer Zahl, die mehr als vier Ziffer hat, die Quadratwurzel zu ziehen.

```
61|77|96|786.
49
1277
 148
 1184
  9396
  1566
  9396
     0
```

Auflöſung. I. Man theile die gegebene Zahl in Klaſſen jede zu zwoen Ziffern von der Rechten zur Linken, wovon die erſte zur Linken wieder auch nur eine Ziffer haben kann.

II.

II. Aus den erſten zwoen Klaſſen ziehe man die Quadratwurzel nach § 112., ſo erhält man in unſerem Beyſpiel daraus für die Wurzel 78.

III. Man ſehe dieſe 78 als eine Menge Zehner an, die den erſten Theil ausmachen; ſo läßt ſich der zweyte Theil oder die Einer der Wurzel finden, wenn man zu dem Reſte 93, der nach Abzug des Quadrats vom erſten Theil 78 geblieben iſt, die folgende Klaſſe 96 herabſetzt, und mit dem doppelten erſten Theile oder 2×78 = 156 in 939 dividirt, weil das doppelte Produkt der Zehner in die Einer bey den Zehnern der Zahl anfängt, woraus die Wurzel gezogen werden ſoll. §. 111. Der Quotient 6 giebt die Einer der Wurzel.

IV. Im übrigen verfahre man wie §. 112. und §. 113 iſt gelehrt worden: nur nehme man den zweyten Theil oder die Einer der Wurzel immer ſo an, daß deren Quadrat mit dem doppelten Produkt aus ihm in

den

den erſten Theil noch in dem enthalten ſeyn kann, was nach Abzug des Quadrats des erſten Theils von der Zahl übrig bleibt, woraus die Wurzel gezogen werden ſoll.

§. 116. Zuſatz. Beſtünde die Zahl aus vier Klaſſen, jede zu zwoen Ziffern; ſo ſuche man nach der Aufgabe die Wurzel für die erſten drey Klaſſen, ſehe ſie als den erſten Theil der Wurzel des Ganzen an, und ſuche zu dieſen erſten Theil den zweyten auf eben die Art, wie in der Aufgabe geſchehen iſt. Dadurch läßt ſich aus jeder Zahl von einer beliebigen Anzahl Ziffer die Wurzel ausziehen.

§. 117. Anmerkung. Nicht alle Zahlen ſind ſo beſchaffen, daß, wenn man aus ihnen die Wurzel zieht, zuletzt alles aufgienge, wie in den Beyſpielen §§. 112. und 115. Meiſtens bleiben Reſte. Man nennt dieſe Zahlen unvollkommene Quadrate, weil es keine Zahl giebt, die mit ſich ſelbſt multiplizirt dieſelbe herausbrächte. Indeſſen laſſen ſich doch Wurzeln angeben, deren Qua-

drate der Zahl, die kein vollkommenes Quadrat iſt, immer näher und näher kommen. Man heiſst dieſes die Wurzel durch Näherung ausziehen.

§. 118. Lehrſatz. Wenn die Wurzel aus einer ganzen Zahl und einem wahren Bruche beſteht, oder was einerley iſt, ein Afterbruch iſt, deſſen Zehler ſich nicht durch den Nenner ohne Reſt dividiren läßt; ſo ſind das Quadrat und Kubus eben ſolche Afterbrüche, deren Zehler durch die Nenner nicht theilbar ſind.

Beweis. I. Es ſey $\frac{x}{y}$ ein Afterbruch, wo ſich x durch y nicht ohne Reſt theilen läßt, deſſen Quadrat ſey $= q$. ſo iſt $\frac{xx}{yy} = q$ §. 105. und $\frac{xxy}{yy} = qy$ oder $\frac{xx}{y} = qy$. Weil ſich nun kein x durch y ohne Reſt dividiren läßt; ſo iſt $\frac{xx}{y}$ ein Afterbruch deſſen Zehler durch den Nenner nicht theilbar iſt,

folg-

folglich auch qy. Wäre ſowohl q als y eine ganze Zahl; ſo müßte ihr Produkt $qy = \frac{xx}{y}$ auch eine ganze Zahl ſeyn. Da dieß nicht möglich iſt; ſo muß entweder q oder y ein Afterbruch ſeyn, deſſen Zehler ſich durch den Nenner nicht ohne Reſt dividiren läßt. Weil aber y der Nenner des Bruches $\frac{x}{y}$, und der Nenner immer eine ganze Zahl iſt; ſo muß q oder das Quadrat von $\frac{x}{y}$ ein Afterbruch ſeyn, deſſen Zehler nicht durch ſeinen Nenner theilbar iſt.

II. Für den Kubus der $= c$ ſeyn ſoll, erhellt die Wahrheit des Satzes auf eine ähnliche Art, weil $\frac{xxx}{yyy} = c$ und $\frac{xxxyy}{yyy} = cyy$ oder $\frac{xxx}{y} = cyy$ iſt.

§. 119. Zuſatz. Wenn man z. B. die Zahl 12 als ein Quadrat betrachtet; ſo ſieht man §. 107., daß die Wurzel größer als 3

aber

aber kleiner als 4 ſeyn müßte; folglich 3 und ein wahrer Bruch. Aber wenn die Wurzel 3 und ein wahrer Bruch iſt; ſo kann nach dem Lehrſatz deſſen Quadrat nicht eine ganze Zahl, das iſt, nicht 12 ſeyn. Daher giebt es keine Zahl die mit ſich ſelbſt multiplizirt die Zahl 12 hervorbrächte.

§. 120. Aufgabe. Aus unvollkommenen Quadraten die Wurzel durch Näherung zu ziehen z. B. aus 84 35.

```
84|35|00|00|91,84
81
 335
 181
 181
-----------
 15400
  1828
 14624
-----------
   77600
   18364
   73456
-----------
    4144
```

Auflöſung. I. Man hänge der Zahl 8435 ſo viel Klaſſen jede von zwoen Nullen an, als man Dezimalziffer in der genäherten Wurzel zu erhalten gedenket.

II. In der Wurzel die man nach der §. 115. gegebenen Auflöſung finden kann, ſchneide man ſo viel Ziffer von der

Rech-

Rechten zu Linken als Dezimalen ab, als man Klaſſen von Nullen angehangen hat.

Beweis. 8435 iſt $= \frac{8435 \times 100}{100}$ $= \frac{843500}{100}$, alſo auch $\sqrt{8435} = \frac{\sqrt{843500}}{\sqrt{100}}$ §. 105. Nach §. 115. iſt $\sqrt{843500} = 918$ und $\sqrt{100} = 10$. alſo $\sqrt{8435} = \frac{\sqrt{843500}}{\sqrt{100}}$ $= \frac{918}{10} = 91{,}8$ §. 58. Nimmt man ſtatt 100 das Quadrat von 100 oder 10000; ſo iſt $8435 = \frac{8453 \times 10000}{10000} = \frac{84350000}{10000}$ folglich $8453 = \frac{\sqrt{84350000}}{\sqrt{10000}} = \frac{9184}{100} = 91{,}84$. §. 58. Man ſieht alſo, daß ſo viele Dezimalziffer in der genäherten Wurzel herauskommen, als viele Klaſſen von Nullen man der Zahl, woraus die Wurzel gezogen werden ſoll, anhängt. Je mehr Dezimalen man ſucht, deſto größer wird die genäherte Wur-

zel ſowohl als deſſen Quadrat; folglich kommen die Quadrate der genäherten Wurzeln, welche mehr Dezimalziffer haben, dem unvollkommenen Quadrate 8435 immer näher und näher.

§. 121. Zuſatz. Die Wurzeln, welche man durch die Näherung findet, ſind eigentlich Wurzeln von Zahlen, die man erhält, wenn man die jedesmaligen Reſte, welche zuletzt bleiben, von dem unvollkommenen Quadrate abzieht, woraus die Wurzel gezogen werden ſolle. Multiplizirt man alſo dieſe Wurzeln mit ſich ſelbſt, und addirt zu ihrem Quadrate den zuletzt gebliebenen Reſt; ſo muß die Zahl herauskommen, wovon die Quadratwurzel durch die Näherung geſucht wird. Es kann dieſes dienen, die Rechnung zu prüfen.

§. 122. Lehrſatz. Wenn die Wurzel zwey Theile hat; ſo beſteht ihr Kubus aus den Kubis beyder Theile; aus dem dreyfachen Produkt vom Quadrate des erſten Theils

in

in den zweyten, und aus dem dreyfachen Produkte von dem Quadrate des zweyten in den erſten Theil.

Beweis. Die zwey Theile der Wurzel ſeyen a und b; ſo iſt ihr Quadrat $=a^2+2ab+b^2$ §. 96. das Quadrat mit der Wurzel multiplizirt giebt den Kubus $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^2+2ab^2+b^3 \\ a^3+2a^2b+ab^2 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

Alſo beſteht der Kubus aus den erwähnten Theilen.

§. 123. **Zuſatz.** Wenn die Wurzel aus Zehnern und Einern beſteht, oder wie §. 108. $=10a+b$ iſt; ſo iſt ihr Kubus $==$

$$\begin{array}{r} 100a^2+20ab+b^2 \text{ §. 108.} \\ 10a+b \\ \hline 100a^2b+20ab^2+b^3 \\ 1000a^3+200a^2b+10ab^2 \\ \hline 1000a^3+300a^2b+30ab^3+b^3 \end{array}$$

$$1000\times a^3+100\times 3a^2b+10\times 3ab^2+b^3$$

 Alſo

Alſo fängt der Kubus der Einer bey den Einern; das dreyfache Produkt von dem Quadrate der Einer in die Zehner bey den Zehnern; das dreyfache Produkt vom Quadrate der Zehner in die Einer bey den Hunderten, und der Kubus der Zehner bey den Tauſendern an.

§. 124. Zuſatz. Weil $\frac{3a^2b}{3a^2} = b$ iſt; ſo erhält man den zweyten Theil b, wenn man das dreyfache Produkt vom Quadrate des erſten in den zweyten Theil, durch das dreyfache Quadrat des erſten dividirt.

§. 125. Zuſatz. Sind a und b am größten oder $a = b = 9$ ſo iſt:

$$1000a^3 = 729 \times 1000 = 729000$$
$$100 \times a^2b = 3 \times 729 \times 100 = 218700$$
$$10 \times 3ab^2 = 3 \times 729 \times 10 = 21870$$
$$b^3 = 729 = 729$$

Summe $= 970299$.

Folg.

Folglich wenn auch a und b am größten ſind; ſo reicht der Kubus der Einer nicht weiter, als bis in die Hunderter; das dreyfache Produkt von dem Quadrate der Einer in die Zehner bis in die Zehentauſender; das dreyfache Produkt vom Quadrate der Zehner in die Einer, und der Kubus der Zehner bis in die Hunderttauſender, und alles zuſammen nicht über die Stelle der Hunderttauſender. Wenn daher die Wurzel aus Zehnern und Einern beſteht; ſo hat der Kubus nie mehr als ſechs Ziffer, ob er ſchon auch fünf oder vier haben kann, wie es geſchiet, wenn z. B. $10a+b=22$ alſo $22^3=10648$ oder $10a+b=10$ und $10^3=1000$ iſt.

§. 126. Zuſatz. Wenn a jede Zahl überhaupt, und b jedes der neun Zahlzeichen bedeuten; ſo iſt $10a+b$ eine Zahl, die aus einer Menge Zehner $=a$ und eine Menge Einer $=b$ beſteht. Der Kubus der Einer, das dreyfache Produkt vom Quadrate der Einer in die Zehner ꝛc. fangen bey eben den

Stel=

Stellen an, als ich §. 123. angegeben habe. Auch findet man den zweyten Theil b auf eben die Art wie §. 124. gelehrt iſt worden.

§. 127. **Aufgabe.** Aus einer Zahl, die aus vier bis ſechs Ziffern beſteht, die Kubikwurzel zu ziehen.

$97|336|46$
64
333
$48 = 3a^2$
$288 = 3a^2b$
453
$432 = 3ab^2$
216
$216 = b^3$
0

Auflöſung. I. Man theile die gegebene Zahl 97336 in Klaſſen jede von drey Ziffern, wovon aber die erſte linkerhand auch nur zwo oder eine Ziffer haben kann; und betrachte die Zahl als einen Kubus, deſſen Wurzel aus Zehnern und Einern beſteht. §. 123.

II. Weil der Kubus der Zehner bey den Tauſendern anfängt; ſo muß er in 97 ſtecken, und kann alſo kein anderer ſeyn, als 64 §. 107. was darüber iſt, gehört zu den übrigen Theilen des Kubus §. 125. die Ku-

bikwurzel 4 ſetze man in die Stelle der Wurzel, und ziehe den Kubus derſelben, das iſt, 64 von 97 ab.

III. Zu dem Reſte 33 ſetze man die nächſte Ziffer 3 aus der folgenden Klaſſe.

IV. Weil hier das dreyfache Produkt von dem Quadrate der Zehner in die Einer anfängt §. 123; ſo dividire man 333 durch das dreyfache Quadrat von dem ſchon gefundenen erſten Theil, oder 4×4×3 = 48. Der Quotient 6 giebt den zweyten Theil, oder die Wurzel §. 124.

V. Das dreyfache Quadrat des erſten Theils 48, mit den zweyten 6 multiplizirt giebt das dreyfache Produkt vom Quadrate des erſten in den zweyten = 288, und läßt, wenn es von 333 abgezogen wird, 45 übrig.

VI. Zu dieſem Reſte ſetze man die zwote Ziffer der zwoten Klaſſe 3 herab, und ziehe das dreyfache Produkt vom Quadrate der

Ei-

Einer, in die Zehner der Wurzel = 3×36×4 = 432, von 453 ab, weil es hier anfängt §. 123.

VII. Zu dem Reſte 21 ſetze man die letzte Ziffer der zwoten Klaſſe 6 herab, und ziehe den Kubus der 6 Einer der Wurzel, das iſt 216 §. 107. von 216 ab. Weil nichts übrig bleibt; ſo iſt 46 die genaue Kubikwurzel aus 97336.

§. 128. Zuſatz. Wenn man die gefundene Wurzel mit ſich ſelbſt, und das Quadrat nochmal mit der Wurzel multiplizirt; ſo erhält man den Kubus. Dadurch kann man alſo die Rechnung prüfen.

§. 129. Aufgabe. Aus einer Zahl, die aus mehr als ſechs Ziffern beſteht, die Kubikwurzel zu ziehen.

3|307|949|149
1
23
3
12
110
48
627
64
5639
588
5292
3474
3402
729
729
0.

Auflöſung. I. Man theile die Zahl in Klaſſen jede zu drey Ziffern, wovon die erſte auch zwo oder nur eine Ziffer bekommen kann.

II. Aus den erſten zwoen Klaſſen linkerhand ſuche man die Kubikwurzel nach §. 127. und

III. ſehe ſie in Rückſicht derjenigen Ziffer, die man aus der folgenden Klaſſe, auf eben die Art wie den zweyten Theil bey den erſten zwoen Klaſſen finden kann, als den erſten Theil an, der aus einer Menge Zehner beſteht §. 126.

IV. Im übrigen verfahre man nach der §. 127. gegebenen Auflöſung. Das beygefügte Beyſpiel kann dieſes am beßten zeigen.

V. Nur nehme man den zweyten Theil immer ſo an daß man die dreyfachen Produkte aus dem Quadrate des erſten Theils in den zweyten, und dem Quadrate des zweyten in den erſten, mit dem Kubus des zweyten Theils, noch von der Zahl wegnehmen kann, die nach Abzug des Kubus vom erſten Theile bey derjenigen übrig bleibt, woraus die Wurzel gezogen wird.

§. 130. Zuſatz. Wenn man die jedesmal gefundene Ziffer der Wurzel als den erſten Theil einer Wurzel die aus zwey Theilen beſteht, anſieht; ſo läßt ſich immer nach § 124. der zweyte Theil dazu ſuchen, wo man übrigens wie in der Auflöſung § 127. und §. 129. gelehrt worden verfährt. Dadurch läßt ſich aus jeder Zahl von ſo vielen Ziffern als man will, die Kubikwurzel ausziehen.

§. 131. Anmerkung. Es giebt unvollkommene Kubos, wie Quadrate, von denen ſich keine genaue Wurzeln angeben laſſen. In ſolchen Fällen begnügt man ſich mit Näherungen, die man allezeit ſo weit treiben kann, als man es für nöthig erachtet.

§. 132. Anmerkung. Betrachtet man z. B. 55 als einen Kubus; ſo ſieht man §. 107. daß deſſen Wurzel größer als 3 und kleiner als 4 folglich 3 und ein wahrer Bruch ſeyn müſſe. Daher kann ihr Kubus nie eine ganze Zahl, das iſt, 55 ſeyn §. 118. oder es giebt keine Zahl, die, wann ſie zweymal mit ſich ſelbſt multiplizirt würde, genau 55 hervorbrächte.

§. 133. Aufgabe. Aus einem unvollkommenen Kubus die Kubikwurzel durch Näherung zu ziehen. Z. B. aus 55.

55|000|000|000|3,802
27
280
27
216
640
576
640
512
1280
4332
1280000
433200
866400
4136000
4560
41314400
8
41314392

Auflöſung. I. Man hange der gegebenen Zahl ſo viele Klaſſen, jede von drey Nullen an, als man in der genäherten Wurzel Dezimalziffer verlangt.

II. In der Wurzel, die man nach §. 129. finden kann, ſchneide man von der Rechten zur Linken ſo viele Ziffer als Dezimalen ab, als man Klaſſen von Nullen angehangen hat.

Der Beweis iſt mit dem von §. 120. einerley, wenn man ſtatt der Zahl 100 oder Potenzen von 100 die Zahl 1000 und ihre Potenzen ſetzt, im übrigen aber ähnliche Schlüſ-

ſe

ſe für die Kubikwurzel wie dort für die Quadratwurzel macht.

§. 134. Anmerkung. Wenn es geſchieht, daß das dreyfache Quadrat vom erſten Theil nicht in dem enthalten iſt, was dadurch dividirt werden muß, um den zweyten Theil zu finden; ſo iſt der zweyte Theil =0; folglich das dreyfache Produkt vom Quadrate des erſten in den zweyten, vom Quadrate des zweyten in den erſten, und der Kubus des zweyten Theils =0. Man kann daher ſogleich, wie in dem Beyſpiele des vorhergehenden §. geſchehen iſt, die ganze Klaſſe herabſetzen, und fortfahren den folgenden Theil der Wurzel zu ſuchen.

§. 135. Zuſatz. Wenn man die gefundene Wurzel kubirt, und den zuletzt gebliebenen Reſt dazu addirt; ſo muß die Zahl herauskommen, aus welcher man die Wurzel gezogen hat.

Von

Von Verhältniſſen und Proportionen.

§. 136. **Erklärung.** Die Vergleichung zwoer Zahlen, oder Größen überhaupt nennt man ein Verhältniß: Sieht man um wie viel eine Größe größer iſt als die andere; ſo heißt das Verhältniß ein **arithmetiſches**; ein **geometriſches** aber, wenn man ſucht, wie oft eine Größe in der anderen enthalten iſt: Sowohl der Unterſchied beyder Größen, wenn man ſie in dem arithmetiſchen Verhältniſſe ſubtrahirt, als der Quotient in dem geometriſchen, wenn man ſie durcheinander dividirt, heißen **Exponenten** ihrer Verhältniſſe. Die Größen ſelbſt, welche miteinander verglichen werden, heißen eine das **vorhergehende** (antecedens) die andere das **folgende Glied** (conſequens) des Verhältniſſes. Z. B. wenn man 3 mit 6 arithmetiſch vergleicht; ſo iſt 3 das vorhergehende, 6 das folgende Glied, und $6 - 3 = 3$ der Exponent des Verhältniſſes. Vergleicht man 3 mit 6 geometriſch, ſo iſt der Exponent $= \frac{6}{3} = 2$.

§. 137.

§. 137. Willkührlicher Satz. Man kann das arithmetiſche Verhältniß durch einen, und das geometriſche durch zwey zwiſchen den beyden Gliedern geſetzte Punkte anzeigen. So bedeutet z. B. 3 . 6 das arithmetiſche Verhältniß der Zahlen 3 und 6, und 3 : 6 ihr geometriſches.

§. 138. Erklärung. Wenn zwey Verhältniſſe gleiche Exponenten haben, das iſt, zwey arithmetiſche gleiche Differenzen und zwey geometriſche gleiche Quotienten geben; ſo ſagt man ſie ſeyen einander gleich. So iſt 3. 6 = 4. 7. und 3 : 6 = 4 : 8. Zwey gleiche Verhältniſſe machen eine Proportion. Folglich iſt 3. 6 = 4. 7 eine arithmetiſche, und 3 : 6 = 4 : 8 eine geometriſche Proportion. Das erſte und vierte Glied der Proportion heißen die äußeren, das zweyte und dritte die mittleren Glieder. Iſt das zweyte und dritte Glied einerley; ſo heißt die Proportion ſtetig. So iſt z. B. 3. 6 = 6. 9 eine arithmetiſche, und 4 : 8 = 8 : 16 eine geometriſche ſtetige Proportion. Man pflegt

die ſtetigen Proportionen auch in folgender Geſtalt auszudrucken $\div$ 3. 6. 9 wenn ſie arithmetiſch, und $\div\!\div$ 4 : 8 : 16 wenn ſie geometriſch ſind.

§. 139. Lehrſatz. Wenn das vorhergehende Glied des arithmetiſchen Verhältniſſes a, und der Exponent d iſt, ſo iſt das folgende Glied $= a + d$.

Beweis. Den Exponenten erhält man, wenn man das vorhergehende Glied von dem folgenden abzieht. Alſo beſteht das folgende aus dem vorhergehenden und dem Exponenten. §. 12.

§. 140. Zuſatz. Der allgemeine Ausdruck des arithmetiſchen Verhältniſſes iſt daher $= a \,.\, a + d$.

§. 141. Zuſatz. Weil zwey gleiche Verhältniſſe eine Proportion machen, ſo iſt der allgemeine Ausdruck einer arithmetiſchen Proportion $a \,.\, a + d = b \,.\, b + d$.

§. 142.

§. 142. Zuſatz. Ein ſtetige arithmetiſche Proportion ſtellt a . a+d = a+d. a+2d oder $\div$ a . a+d . a+2d allgemein vor.

§. 143. Anmerkung. Beyſpiele in Zahlen können die Sache am beſten erläutern. Das Verhältniß ſey 4. 9 ſo iſt der Exponent 9 — 4 = 5., alſo das vorhergehende Glied 4, ſammt dem Exponenten 5 dem folgenden Glied 9 gleich.

§. 144. Anmerkung. Wenn das folgende Glied kleiner iſt, als das vorhergehende, ſo wird der Exponent negativ. In dem Verhältniſſe 7. 3 iſt der Exponent 3 — 7 = — 4. aber ungeachtet deſſen, iſt doch das vorhergehende +7 ſammt dem Exponenten — 4 das iſt +7 — 4 = +3 oder dem folgenden gleich.

§. 145. Lehrſatz. In der arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der äußeren der Summe der mittlern Glieder gleich.

Beweis. Weil a . a+d = b. b+d jede arithmetiſche Proportion vorſtellt, ſo iſt die Summe der mittlern a + d + b, offenbar der Summe der äußeren, welche a + b + d iſt, gleich.

§. 146. **Zuſatz.** In der ſtetigen Proportion iſt das zweyte und dritte Glied einerley. §. 138. Man nennt es das **arithmetiſch Mittlere.** Folglich iſt das doppelte Mittlere in der ſtetigen Proportion der Summe der äußeren gleich.

§. 147. **Aufgabe.** Aus drey gegebenen Gliedern einer arithmetiſchen Proportion das vierte zu finden.

Auflöſung. I. Iſt das unbekannte Glied ein äußeres; ſo addire man die mittleren Glieder, und ſubtrahire von der Summe das gegebene äußere.

II. Iſt das unbekannte Glied ein mittleres; ſo addire man die äußeren Glieder, und ſubtrahire von der Summe das gegebene mittlere.

Beweis. I. Die Summe der mittleren Glieder iſt der Summe aus dem gegebenen äußeren und dem unbekannten Gliede gleich, §. 145. folglich findet man das unbekannte, wenn man von der Summe der mittlern das gegebene äußere ſubtrahirt.

Der Beweis für II. iſt dem für I. ganz ähnlich.

§. 148. Anmerkung. Es ſey 3 . 8 = 5 . x. ſo iſt 8 + 5 = 3 + x §. 145. alſo 8 + 5 — 3 = 10 = x. wäre 3 . y = 5 . 10. ſo iſt 10 + 3 = 5 + x §. 145. alſo 10 + 3 — 5 = 8 = y.

§. 149. Zuſatz. Weil in der ſtetigen Proportion die Summe der äußeren Glieder dem doppelten mittlern gleich iſt, §. 146. ſo

findet man das arithmetiſch mittlere Glied, wenn man die Summe der äußeren halbirt. Z. B. zwiſchen 3 und 7 ſeye das arithmetiſch mittlere $=x$, iſt $3+7=10=2x$ folglich $\frac{10}{2}=5=x$.

§. 150. Anmerkung. Wenn man für einerley Größe verſchiedene Werthe, und keinen Grund hat, einen vor den übrigen zu wählen, ſo nimmt man zwiſchen dem kleinſten und größten Werthe ein arithmetiſches Mittel. Denn da die Werthe ſich auf einerley Größe beziehen, ſo können ſie nicht alle zugleich wahr ſeyn. Auch iſt es nicht wahrſcheinlich, das ſie alle kleiner oder größer ſeyn ſollten, als die Größe iſt, auf die ſie ſich beziehen, folglich liegt nach den Regeln der Wahrſcheinlichkeit der wahre Werth zwiſchen dem gegebenen kleinſten und größten. Weil man aber keinen Grund hat, warum er dem kleinſten oder größten näher liegen ſollte, ſo nimmt man an, er ſeye von beyden gleichweit entfernt. Eine Linie z. B. die man zweymal gemeſſen hat, fin-

findet man einmal von 867'. 6" das anderemal von 866'. 3" im zehentheiligen Maaße. Das arithmetiſche Mittel iſt $\frac{867'+6''+866'+3''}{2}$ $+ \frac{1733'+9''}{2} = 866\frac{1}{2}' + 4\frac{1}{2}'' = 866' + 9\frac{1}{2}''$. Man nimt daher die Linie von $866'+9\frac{1}{2}''$ an. Es iſt bekannt, daß das Holz, wenn es geſpalten wird, mehr Raum einnimt, als da es noch auf dem Stamme ſteht. Die Urſache liegt in den leeren Räumen zwiſchen den Scheitern, wenn das Holz aufgeklaftert wird. Die Größe aller leeren Räume bey jeder einzelnen Klafter hängt von der Größe und Figur der Scheiter ab. Stellt man Verſuche an, um zu erfahen, wie viel Kubikfuß Stammholz zu einer gewiſſen Menge Kubikfuß geſpalten oder Klafterholz erforderlich ſind, ſo wird man verſchiedene Reſultate finden, je nachdem die Scheiter kleiner oder größer ſind. Nimt man aus allen Verſuchen ein arithmetiſches Mittel, ſo kann man nach den Regeln der Wahrſcheinlichkeit annehmen, das in den meiſten Fällen die Wahrheit von demſelben weniger

ab-

abweichen werde, als wenn man den kleinſten oder größten der gefundenen Werthe bey Rechnungen zu Grund legte. Nach Vierenkle z. B. braucht man 190 bis 200 Kubikfuß Stammholz zu einer ſechsſchuhigen Klafter, die alſo 216 Kubikfuß hält, das eigentliche Mittel zwiſchen 190 und 200 iſt $\frac{190+200}{2} = \frac{390}{2} = 195$. folglich geben 195 Kubikfuß Stammholz 216 Kubikfuß Klafterholz. Wenn ſchon in einigen Fällen zu 216 Kubikfuß Klafterholz mehr als 195 Kubikfuß Stammholz erforderlich ſeyn ſollten, ſo wird es wieder andere Fälle geben, wo man weniger braucht. Man kann daher annehmen, daß, wenn man die Menge Kubikfuß Stammholz, welche zu einer größeren Anzahl Klafter nöthig ſind auf alle gleich vertheilte, auf jede davon 195 treffen würden. Statt einem arithmetiſchen Mittel zwiſchen dem kleinſten und größten Werthe, addiren einige alle gefundene Werthe zuſammen, und dividiren ihre Summe durch die Anzahl der Verſuche. Was herauskömmt, wird ſodann bey weitern Rechnungen zum Grunde gelegt.

§. 151.

§. 151. Lehrſatz. Wenn in dem geometriſchen Verhältniſſe das vorhergehende Glied a, und der Exponent q iſt, ſo muß das folgende aq ſeyn.

Beweis. Es ſey das Verhältniß a : b ſo muß $\frac{b}{a} = q$ folglich $\frac{ab}{a} = b = aq$ ſeyn, wenn man ſowohl $\frac{b}{a}$ als q mit a multiplizirt.

§. 152. Zuſatz. Der allgemeine Ausdruck des geometriſchen Verhältniſſes iſt alſo a : aq.

§. 153. Zuſatz. Weil zwey gleiche Verhältniſſe eine Proportion machen §. 138. ſo ſtellt a : aq = b ; bq jede geometriſche Proportion vor.

§. 154. Zuſatz. In der ſtetigen Proportion ſind die zwey mittleren Glieder einander gleich, folglich iſt ihr Ausdruck a : aq = aq ; aq^2 oder ∺ a ; aq ; aq^2.

§. 155. Zuſatz. Wenn man ſowohl das vorhergehende als folgende Glied entweder mit einerley Zahl multiplizirt oder dividirt, ſo bleibt das Verhältniß ungeändert. Denn es iſt $a : aq = a \times m : aq \times m = \frac{a}{m} : \frac{aq}{m}$. Weil, wenn man das folgende Glied durch ſein vorhergehendes dividirt in allen drey Verhältniſſen der Exponent q herauskömmt. So iſt z. B. $2 : 3 = 2 \times 4 : 3 \times 4 = \frac{2}{4} : \frac{3}{4}$ denn es iſt $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 4}{2 \times 4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{2}$ §. 50.

§. 156. Anmerkung. Der letzte Zuſatz dient ſowohl Verhältniſſe ihres Werths unbeſchadet durch kleinere Zahlen auszudrücken, als Brüche wegzuſchaffen, welches in den Rechnungen einige Erleichterung oder Verkürzung geben kann. Z. B. in dem Verhältniſſe 18 : 144 läßt ſich 18 und 144 durch 2 und 3 alſo durch 6 dividiren §. 41. daher iſt $18 : 144 = \frac{18}{6} : \frac{144}{6} = 3 : 24$. Weil

ſich

ſich aber 3 und 24 nochmal durch 3 dividiren laſſen §. 41. ſo iſt auch $18 : 144 = \frac{3}{3} : \frac{24}{3} = 1 : 8$. In dem Verhältniſſe $2\frac{3}{4} : 5\frac{2}{3} = \frac{11}{4} : \frac{17}{3}$ kann man beyde Glieder mit $3 \times 4 = 12$ multipliziren, wenn man die Brüche wegſchaffen will, und es iſt $\frac{11 \times 12}{4} : \frac{17 \times 12}{3} = 11 \times 3 : 17 \times 4 = 33 : 68$.

§. 157. Lehrſatz. In der geometriſchen Proportion iſt das Produkt der mittleren Glieder dem Produkte der äußeren gleich.

Beweis. In dem allgemeinen Ausdrucke $a : aq = b : bq$ §. 153. iſt das Produkt der mittleren $aq \times b$ offenbar dem Produkte der äußeren $a \times bq$ gleich; weil einerley Faktoren gleiche Produkte geben.

§. 158. Zuſatz. In der ſtetigen Proportion $\div\!\div\, a : aq : aq^2$ iſt das Produkt der äußeren $a \times aq^2 = a^2 q^2$ dem Quadrate des mittleren, das iſt, $aq \times aq = a^2 q^2$ gleich. Man findet alſo das mittlere geometriſche

Glied

Glied, wenn man aus dem Produkte der äußeren die Quadratwurzel auszieht.

§. 159. Aus zwey gleichen Produkten läßt ſich eine Proportion machen, wenn man die Faktoren des einen Produkts zu den mittleren Gliedern, die des andern zu den äußeren macht. Wenn $ad = bc$. ſo iſt

$$a : b = c : d.$$

Beweis. Weil $ad = bc$ ſo iſt auch $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ folglich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder $a : b = c : d$.

Beyſpiel. $3 \times 4 = 2 \times 6$. Alſo $4 : 2 = 6 : 3$.

§. 160. Anmerkung. Es laſſen ſich aus jeder Proportion theils durch die Verwechslung, theils durch die Addition oder Subtraktion ihrer Glieder neue Proportionen herausbringen. So iſt

I. Die Ordnung der Glieder willkühr- lich, wenn man nur die mittleren ſowohl als die äußeren immer wieder die einen zu den mittleren, die anderen zu den äußeren macht. Z. B. weil $a : aq = b : bq$, ſo iſt

I. $a : b = aq : bq$. Wenn man die mittleren verwechſelt. $bq : aq = b : a$. Wenn man die äußeren verwechſelt $aq : bq = a : b$. Wenn man die äußeren zu den mittlern und die mittlern zu den äußeren macht ꝛc.

II. Durch die Addition können die Glie- der auf folgende Arten zuſammengeſetzt wer- den.

$$a + aq : a = b + bq : b.$$

$$a + aq : aq = b + bq : bq.$$

$$a + b : aq + bq = a : aq = b : bq$$

oder die Summe der vorhergehenden Glieder bey gleichen Verhältniſſen verhält ſich zur Summe ihrer folgenden, wie jedes vorher- gehende zu ſeinem folgenden.

III.

III. Durch die Subtraktion der Glieder entſtehen folgende Proportionen.

$$a : a - aq = b : b - bq.$$

$$aq : a - aq = bq : b - bq.$$

$$aq - a : a = bq - b : b.$$

$$aq - a : aq = bq - b : bq.$$

$$a - b : aq - bq = a : aq = b : bq.$$

Der Beweis, daß dadurch wieder Proportionen entſtehen, iſt für alle einerley, weil das Produkt der äußern Glieder dem Produkte der mittleren gleich iſt, wie man ſich leicht überzeugen kann, wenn man die Multiplikation wirklich macht.

§. 161. Aufgabe. Aus drey gegebenen Gliedern einer geometriſchen Proportion das vierte zu finden.

Aufloſung. I. Wenn das unbekannte Glied ein äußeres iſt; ſo multiplizire man

die

die mittleren, und dividire ihr Produkt durch das gegebene äußere.

II. Iſt das unbekannte Glied ein mittleres; ſo multiplizire man die äußeren miteinander, und dividire ihr Produkt durch das gegebene mittlere.

Beweis. Es ſey das unbekannte Glied $= x$ und

I. $a : b = c : x$. So iſt $bc = ax$ §. 157. alſo $\frac{bc}{a} = \frac{ax}{a} = x$.

II. Wenn $a : x = c : d$ ſo iſt $ad = cx$ §. 157. alſo $\frac{ad}{c} = \frac{cx}{c} = x$.

§. 162. Anmerkung. Dieſes iſt die ſogenannte Regel Detry. Man hat bey ihrer Anwendung vor Allem darauf zu ſehen, ob die gegebenen Glieder der Natur der Dinge gemäß wirklich in einer geometriſchen Pro-

Proportion ſtehen, als wie Waare und Preis, Arbeit und Lohn, Kapital und Intereſſe, Urſache und Wirkung ꝛc. Auch müſſen die Glieder gehörig geordnet ſeyn. Die Berechnung ſelbſt wird ſodann nach der Auflöſung der vorhergehenden Aufgabe leicht gemacht. Beyſpiele zeigen das Verfahren am beſten. Es frägt ſich, wie viele Gulden der Zins eines Kapitals von 2566 beträgt, wenn 5 vom Hundert gezahlt werden? Weil eine Proportion aus zwey gleichen Verhältniſſen beſteht; ſo müſſen deren immer zwey gegeben ſeyn. In unſerm Beyſpiele ſind dieſe zwey Verhältniſſe, das der Kapitalien, und das der Intereſſen oder Zinſen. Man ſetze dasjenige Verhältniß, wovon beyde Glieder gegeben ſind, zuerſt an; und das andere, worinn das unbekannte Glied vorkömmt, nach dem Gleichheitszeichen, doch ſo, daß ſich das erſte Glied auf das dritte, und das zweyte auf das vierte beziehe. So erhält man, wenn das unbekannte Glied indeſſen = x geſetzt wird:

100 Guld. Kapit. 2566 Gul. Kap. = 5 Guld. Zins. x Guld. Zins.

Weil hier das folgende Glied des erſten Verhältniſſes 2566 größer iſt, als ſein vorhergehendes 100, ſo wird auch das unbekannte oder x in eben dem Verhältniſſe größer ſeyn als 5. Da nun dieſes vermöge der Natur der Sache ſo ſeyn muß, weil man für 2566 Gulden mehr Zins zahlen muß, als für 100, ſo ſind die Glieder gehörig geordnet, und es iſt $x = \frac{2566 \times 5}{100}$ $= \frac{12830}{100} = 128{,}30$ Gulden. §. 161. Oder weil $\frac{36}{100}$ Guld. $= \frac{3}{10}$ Guld. $= \frac{3 \times 60}{10}$ Kr. $= 18$ Kr. ſo wird $x = 128$ Guld. + 18 Kr.

Wenn 20 Holzhauer in 7 Werktagen 130 Klafterholz aufſtellen; wie viel Zeit brauchen 12 zu einer gleichen Anzahl Klaftern? Dieſes giebt

20 Holzh. 12 Holzh. = 7 Tag. x Tag.

Hier

Hier iſt das folgende Glied 12 im erſten Verhältniſſe kleiner als ſein vorhergehendes 20, folglich würde in eben dem Verhältniſſe x kleiner werden als 7, wenn man die Ordnung der Glieder, wie ſie geſchrieben ſind, beybehalten, und das vierte Glied nach §. 161. ſuchen würde. Aber 12 Arbeiter brauchen zu einerley Arbeit mehr Zeit als 20, und zwar um ſo viel mehr als ihrer weniger ſind. Man kehre alſo das zweyte Verhältniß um, oder was einerley iſt, man verwechsle das vorhergehende und folgende Glied in demſelben, ſo hat man

$$20 : 12 = x : 7.$$

Folglich $x = \frac{20 \times 7}{12} = \frac{140}{12} = 11\frac{8}{12} = 11\frac{2}{3}$ Tage.

§. 163. Anmerkung. Weil man die mittleren Glieder verwechſeln kann §. 160. I. und das Verhältniß ſich nicht ändert, wenn man das vorhergehende, und folgende Glied des Verhältniſſes mit einerley Zahl multiplizirt oder dividirt §. 155. ſo kann man

das

das erſte und zweyte oder das erſte und dritte Glied mit der Proportion mit einerley Zahl entweder multipliziren oder dividiren. Die Multiplikation kann dienen, die Brüche wegzuſchaffen, wenn welche vorkommen; die Diviſion aber, die Verhältniſſe durch kleinere Zahlen auszudrücken.

§. 164. Anmerkung. Vortheile, wie die des vorhergehenden §. und noch andere, wodurch die Berechnung erleichtert oder verkürzt wird, heißen insgemein die welſche Praktik. Allein wer viel rechnet, ſagt Herr Hofrath von Käſtner, und die Gründe der Rechnungen verſteht, erfindet ſie ſelbſt, und einem andern iſt nichts an ihnen gelegen.

§. 165. Anmerkung. Wenn genannte Zahlen vorkommen, ſo muß man die Glieder auf die Einheiten der kleinſten Gattung bringen. Z. B. wenn 3 ℔ 7 Loth, 5 Guld. 22 Kr. koſten, was werden 7 ℔ 5 Loth koſten? Weil 1 ℔ = 32 Loth, und 1 Gulden

= 60 Kr., ſo ſind 3 ℔ 7 Loth = 103 Loth, 7 ℔ 5 Loth = 229 Loth 5 Gulden 22 Kr. = 322 Kr. alſo

103 Loth : 229 Loth = 322 Kr. x Kr. und $x = \frac{229 \times 322}{103} = 715\frac{93}{103}$ Kr. = 11 Gul. $55\frac{93}{103}$ Kr. oder in einem Dezimalbruche 11 Gulden 55,9 Kreuzer.

§. 166. Anmerkung. Zur Uebung für Anfänger will ich noch einige Beyſpiele herſetzen.

Wenn 14,5 Klafter Buchenholz ſo viel Wärme bey der Feuerung geben, als 17 Klafter Feichtenholz, und die Klafter Feichtenholz 3 Gulden 30 Kreuzer koſtet, was wäre die Klafter Buchenholz als Brennholz betrachtet nach dieſem Preiſe des Feichtenholzes werth?

14,5 : 17 = 3,5 : x alſo $x = \frac{3,5 \times 17}{14,5}$ $= 4\frac{3}{29}$ Gulden, wo man den Bruch $\frac{3}{29}$ auch in Kreuzern ausdrücken kann, denn $\frac{3}{29}$ Guld. iſt $= \frac{3 \times 60}{29}$ Kr. $= 6\frac{6}{29}$ Kreuzer.

Ein

Ein Gehau von drey Tagwerken Holzes gab 165 Klafter Brennholz, wie viel enthält davon zu eben derſelben Zeit der ganze Wald, wenn man annimmt, daß die übrigen Tagwerke ohngefähr eben ſo mit Holz beſtanden, und der Anzahl nach 450 ſind?

$$3 : 450 = 165 ; x = \frac{450 \times 165}{3} = 24750.$$

Setzt man den Kubikfuß Eichenholz zu 67 ℔, und nimt an, daß ein Pferd bey mittelmäßig gutem Wege 6 Zentner zu ziehen vermag, ſo frägt ſich's, wie viel man Pferde braucht, um einen eichenen Bloch der 40 Kubikfuß hält, zu tranſportiren? Alle 40 Kubikfuß haben 40×67 ℔ = 2680 ℔. Alſo

600 ℔ : 2680 ℔ = 1 Pferd : x Pferd.
Alſo $x = \frac{2680}{600} = 4\frac{28}{60}$.

Das heißt, man braucht vier gute Pferde, die etwas über 6 Zentner ziehen können.

Wenn der baieriſche Fuß zum rheiniſchen ſich verhält wie 12938 : 13913, wie viel rheiniſche machen 6 baieriſche Fuß?

12938 : 13913 = 1 baieriſcher Fuß : 1 rheiniſcher Fuß.

Alſo 1 baieriſcher Fuß = $\frac{12938}{13938}$ rheiniſch folglich bey 6 baieriſchen = $\frac{6 \times 12938}{13913}$ rheiniſch = 5,57 rheiniſche.

Wenn 72 Kubikfuß aufgeklaftertes Holz, 65 Kubikfuß Stammholz erfordern, wie viel erfordert eine Klafter deſſen Höhe und Breite 6 Fuß, die Scheiterlänge aber $4\frac{1}{2}$ Fuß iſt, alſo $6 \times 6 \times 4\frac{1}{2}$ = 162 Kubikfuß hält?

$72 : 162 = 65 : x = \frac{162 \times 65}{72} = 146,25.$

Ein Stamm Nadelholz der als Bauholz gebraucht werden könnte, hält 65 Kubikfuß, was iſt er werth, wenn er zur Feuerung gebraucht wird, was als Bauholz, wenn die Klafter Brennholz von ſeiner Art 3 Guld. 20 Kr.

ko-

koſtet, und Bauholz doppelt ſo theuer als Brennholz iſt? — Nach dem vorhergehenden Beyſpiel erfordert die Klafter 146,25 Kubikfuß Stammholz, alſo

146,25 Kubikf. 65 Kubikf. = 1 Klaft. x Kl.

Dieſes giebt $x = \frac{65}{146,25}$ Klafter.

Man ſetze alſo: 1 Klafter $\frac{65}{146,25}$ Klaft. = $3\frac{1}{3}$ Gulden, x Gulden.

Daraus findet ſich x = 1,48 Gulden, oder weil $\frac{48}{100}$ Guld. = $\frac{48 \times 60}{100}$ Kr. = 28,8 Kr. ſo iſt der Stamm als Brennholz in einer runden Zahl 1 Gulden 29 Kreuzer, und als Bauholz 2 Gulden 58 Kreuzer werth.

Ein Wald, den man forſtmäßig benützte, hat im Durchſchnitte von 10 Jahren nach Abzug aller Unköſten, 540 Gulden jährliche Einnahme gegeben, was iſt der ganze Wald werth, wenn man dieß als das Intereſſe eines Kapitals anſieht, und $4\frac{1}{2}$ für das Hundert rechnet?

$4,5 : 540 = 100 : x$. Alſo $x = \frac{54000}{4,5}$ $= 12000$ Gulden.

Ein Münchner Schäffel Korn aus meh⸗rern Verſuchen das Mittel genommen, giebt nach Abzug der Verſtäubung beym Mahlen, der Kleyen, und der Mitz des Müllers zu $\frac{1}{16}$ vom Schäffel, 245 baieriſche Pfund Mehl, aus welchen der Bäcker $330\frac{3}{4}$ ℔ wohl ausge⸗backenes Brod liefern kann. Die Koſten und Auslagen für den Ankauf, Holz, Salz, Fuhrlohn in ⸗ und aus der Mühl, Trink⸗geld in der Mühl, Schranengeld und Lichter, ſammt dem Bäckerlohn machen bey einem Schäffel zuſammen 10 Gulden. Die Kleyen die der Bäcker benützen oder verkaufen kann, zu 16 Kreuzer gerechnet, laſſen 9 Gulden 44 Kreuzer von den 10 Gulden übrig, wenn man ſie abzieht; alſo kommen $330\frac{3}{4}$ ℔ Brod auf 9 Gulden 44 Kreuzer zu ſtehen. Es fragt ſich, wie viel Pfund ein ſogenannter 8 Kreuzerlaib wägen müſſe.

9 Guld. 44 Kr. 8 Kr. $= 330\frac{3}{4}$ ℔ : x ℔.

Ich

Ich finde $x = 4$ ℔ 16 Loth $3\frac{69}{73}$ Quintel das ℔ zu 32 Loth, und das Loth zu 4 Quintel geſetzt.

§. 167. Oft muß ein Ganzes in mehrere Theile getheilt werden, die ſich wie gegebene Zahlen verhalten, wie z. B. geſchieht, wenn bey Geſellſchaften Gewinn oder Verluſt in den Verhältniſſen der Einlagen vertheilt werden muß. Dann haben mehrere Perſonen zu gewiſſen Unternehmungen ungleiche Summen zuſammgeſchoſſen; ſo iſt es den Regeln der natürlichen Billigkeit gemäß, daß jeder in eben dem Verhältniſſe nicht nur mehr gewinne, ſondern auch verliere, als ſeine Einlage größer iſt. Daher muß ſich die Summe aller Einlagen zur Einlage jedes einzelnen Theilnehmers verhalten, wie der ganze Gewinn oder Verluſt zum Gewinn oder Verluſt deſſelben. Man ſetze, ein Holzgrund beſtehe aus 142 Tagwerken und gehöre 20 Perſonen.

5 davon haben jeder 12 Tagwerke.

4 — — — — 8 —

3 — — — — 6 —

8 — — — — 4 —

Sie kommen überein ihr Holz gemeinſchaftlich und forſtmäßig zu benützen, und gehauweis abzutreiben: ſieht man die Tagwerke, die jeder beſitzt, als eingelegte Kapitalien, das was die jährliche Gehaue abwerfen, als Gewinn an; ſo läßt ſich berechnen, wie viel jeden von der jährlichen Holzerträgniß trift. Bey dem erſten Gehaue hat man z. B. 180 Klafter Holz erhalten. Wenn die Menge und Güte des Holzes, womit die verſchiedenen Tagwerke beſtanden ſind, nicht zu ſehr verſchieden iſt, ſo iſt es den Regeln der Billigkeit gemäß, daß die 180 Klaftern in dem Verhältniſſe der Anzahl Tagwerke, die jeder beſitzt, vertheilt werden. Man hat hier vier Klaſſen.

Die erſte beſitzt 60 Tagwerke.

2te — 32 ——

3te — 18 ——

4te — 32 ——

Folglich verhalten ſich

142 Tag. 60 Tag. = 180 Klaft. x = $76\frac{8}{142}$

142 32 = 180 : y = $40\frac{80}{142}$

142 18 = 180 : u = $22\frac{116}{142}$

142 32 = 180 : z = $40\frac{80}{142}$

Alſo erhält die erſte Klaſſe $76\frac{8}{142}$ Klafter, folglich jeder von den 5, welche die erſte Klaſſe ausmachen, den fünften Theil, das iſt $15\frac{15}{71}$ oder beynahe 15,2 Klafter. Bey den übrigen Klaſſen dividirt man ebenfalls das was die ganze Klaſſe erhält, durch die Anzahl der Perſonen die zur Klaſſe gehören, um das zu finden, was jeden trift. Will man die Rechnung zuletzt prüfen, ſo addire man

alle

alle gefundene Antheile aller Klaſſen zuſammen, die Summe muß das Ganze oder 180 ſeyn, welches nach den gegebenen Verhältniſſen eingetheilt würde.

§. 168. **Anmerkung.** Auf eben die Art verfährt man bey der Vermiſchungsrechnung, wo man die Verhältniſſe aller einfachen Theile die zu einer Vermiſchung kommen, giebt, und zu wiſſen verlangt, wie viel von jeder einfachen Materie zu einer gewiſſen Quantität vermiſchter genommen werden müße. Exempel. Wenn man bey dem Pulver zu 25 ℔ Salpeter 6 ℔ Kohlen und 5 ℔ Schwefel nimt, ſo fragt ſich, wie viel Salpeter, Schwefel und Kohlen man zu 1000 Zentner Pulver nöthig habe? Es iſt $25 + 6 + 5 = 36$ alſo:

$36 : 1000 = 25 : x$ Salpeter $= 694\frac{4}{9}$

$36 : 1000 = 6 : y$ Kohlen $= 166\frac{6}{9}$

$36 : 1000 = 5 : z$ Schwefel $= 138\frac{8}{9}$.

§. 169. Lehrſatz. Wenn man bey zwo oder mehreren geometriſchen Proportionen die vorhergehenden und folgenden Glieder miteinander multiplizirt, ſo ſtehen auch die Produkte noch in einer Proportion.

Weil $a : aq = b : bq$

$\underline{c : cp = d : dp}$

So iſt auch $ac : acpq = bd : bd\,pq$.

Beweis. Das Produkt der mittleren $acpq \times bd$ iſt offenbar dem Produkte der äußeren $ac \times bd\,pq$ gleich.

§. 170. Zuſatz. Multiplizirt man auf dieſe Art die gleichnamigen Glieder der nämlichen Proportion einmal, zweymal oder mehrmal mit ſich ſelbſt, ſo erhellt daß auch die Quadrate, Kubi ꝛc. von den Gliedern einer geometriſchen Proportion, eine Proportion machen. Denn weil $a : aq = b : bq$ iſt, ſo iſt auch

$$a^2 : a^2q^2 = b^2 : b^2q^2$$
$$a^3 : a^3q^3 = b^3 : b^3q^3.$$

§. 171.

§. 171. Erklärung. Urſache heißt, was den Grund von dem Daſeyn eines andern Dings in ſich enthält. Wirkung aber, von deſſen Daſeyn der Grund in einem andern Ding liegt. So laſſen ſich z. B. die Zinſen als eine Wirkung anſehen, weil der Grund, warum man ſie erhält, in dem Kapital ſowohl, welches man ausgelegt hat, als in der Zeit liegt, auf welche man ausgelehnt hat. Ich nenne ähnliche Urſachen und Wirkungen bey denen ſich nichts als ihre Größe unterſcheiden läßt.

§. 172. Lehrſatz. Wenn man ähnliche Urſachen und Wirkungen ihren Verhältniſſen gemäß, die ſie untereinander haben, durch Zahlen ausdrückt, ſo verhalten ſich die Zahlen, welche die Wirkungen ausdrücken, wie die Produkte derjenigen Zahlen, womit ihre ähnliche Urſachen ausgedrückt ſind.

Beweis. Man ſetze z. B. drey Urſachen bringen eine Wirkung = E und drey andere mit den vorigen ähnliche eine Wirkung

kung = e hervor. Die Verhältniſſe der drey ähnlichen Urſachen in Zahlen ausgedrückt, ſeyen A : a, B : b, C : c. So muß nach dem Satz E : e = ABC : abc ſeyn.

Wenn die drey Urſachen	ſo ſey die Wirkung
A, B, C ſind	— — E
— a, B, C	— — F
— a, b, C	— — G
— a, b, c	— — e.

Für E und F ſind alle Urſachen gleich bis auf A und a. Wäre A mit a nicht nur ähnlich, ſondern ſelbſt gleich; ſo würden auch die Wirkungen E und F gleich ſeyn müſſen. Da ſie aber zwar ähnlich aber von ungleicher Größe ſind, ſo muß ſich E zu F verhalten wie A zu a. Vergleicht man F mit G, und G mit e auf eben die Art, ſo erhält man folgende Proportionen;

$$E : F = A : a$$
$$F : G = B : b$$
$$G : e = C : c.$$

Alſo §. 169. $EFG : FGe = ABC : abc$. und wenn man im erſten Verhältniſſe das vorhergehende und folgende Glied durch FG dividirt §. 156. $E : e = ABC : abc$.

§. 173. Zuſatz. Daher iſt $e \times ABC = E \times abc$. Man kann aber die Faktoren von dieſen gleichen Produkten auch untereinander die einen rechts die andern linkerhand eines Vertikalſtriches ſetzen, wie folgender Anſatz zeigt.

$$\begin{array}{c|c} E & e \\ a & A \\ b & B \\ c & C \end{array}$$

Dadurch kommen die eine Wirkung rechts die andere linkerhand des Vertikalſtriches zu ſtehen; ihre Urſachen aber allemal auf die entgegengeſetzte Seite.

§. 174. Zuſatz. Weil das Produkt der Zahlen die rechterhand des Vertikalſtriches ſtehen, dem Produkte derjenigen gleich iſt, welche ſich linkerhand deſſelben befinden, ſo kann man beyderſeits, wo, und ſo lange es angeht, überall einen Faktor durch einerley dritte Zahl dividiren, und auf dieſe Art manche Reduktion anbringen.

§. 175. Zuſatz. Kommen eigentliche oder Afterbrüche unter den Faktoren vor; ſo darf man nur ihre Nenner auf die andere Seite des Vertikalſtriches hinüber ſetzen, wenn man ſie wegſchaffen will. Denn dadurch multiplizirt man beyderſeits mit ebendemſelben Nenner, folglich bleiben die beyden Produkte noch gleich, und der Nenner fällt auf der Seite, wo der Bruch ſteht, weg; weil, wenn man einen Bruch mit ſeinem Nenner multiplizirt, das Produkt der Zehler iſt.

§. 176. Anmerkung. Der Satz §. 172. ſammt den Zuſätzen enthält die Gründe von dem Verfahren bey der ſogenannten Reeſiſchen

Re.

Regel. Herr Hofrath von Käſtner führt Seite 33. Fortſetzung der Rechenkunſt, Mich. Lor. Willigs gründliche Vorſtellung der Reeſiſchen Regel als ein gutes Rechenbuch an, das wegen ſeiner Deutlichkeit, und ausführlichen Anwendung auf allerley im gemeinen Leben vorkommende Rechnungen brauchbar iſt, mit folgendem Zuſatze: **Die Achtung, in der eine für den Mathematiker ſo elende Kunſt als die Reeſiſche, muß geſtanden haben, vielleicht bey Ignoranten noch ſteht, läßt ſich daraus beurtheilen, daß ſie auf dem Titel dieſes Buches ohne Zweifel, es verkäuflicher zu machen, erwähnt ward.** Die Anwendung läßt ſich am Beſten durch Beyſpiele zeigen. Wenn 100 Gulden in 1 Jahr 4 Gulden Zins geben, wie viel erhält man für 5460 Gulden in 8 Jahren 9 Monaten? Man nenne die geſuchte Zahl x. und ſehe die Zinſen als Wirkungen, die Kapitalien und Zeiten aber als Urſachen an, übrigens verfahre man nach folgenden Regeln.

4	x
5460	100
35	1
4	

$7 \times 273 = 1911 = x.$

I. Man bringe die gleichnamigen Glieder auf einerley Einheiten, wie hier mit 8 Jahren 9 Monaten geſchehen iſt, denn weil das Jahr 12 Monate hat, ſo ſind 8 Jahre 9 Monate $= 8\frac{9}{12} = 8\frac{3}{4} = \frac{35}{4}$ Jahr.

II. Man ſetze die eine Wirkung rechts, die andere linkerhand eines Vertikalſtriches, die zugehörigen Urſachen aber auf die entgegengeſetzte Seite ihrer Wirkungen.

III. Man ſchaffe nach §. 175. die Brüche weg.

IV. Man mache alle Reduktionen, die ſich nach §. 174. anbringen laſſen.

V. Diejenigen Zahlen, welche beyderſeits nach allen möglichen Reduktionen, zuletzt noch übrig bleiben, multiplizire man miteinander, und

VI. Dividire durch die Zahl, welche mit der unbekannten noch multiplizirt iſt, das nach V. erhaltene Produkt auf der anderen Seite. Was herauskömmt, iſt die geſuchte Zahl.

Wenn man in unſerm Beyſpiele züerſt den Bruch wegſchaft, ſo hat man $4 \times 5460 \times 35 = 4 \times 100x$. Beyderſeits durch 4 dividirt, giebt $5460 \times 35 = 100x$. Dividirt man 5460 und 100 durch 10, ſo kömmt $546 \times 35 = 10x$. Endlich 35 und 10 durch 5 dividirt, giebt $546 \times 7 = 2x$. Wo noch 546 und 2 durch 2 dividirt werden könnten, ſo daß $273 \times 7 = 1911 = x$ herauskömmt.

§. 177. Anmerkung. Zur Uebung für Anfänger will ich noch ein paar Beyſpiele herſetzen. Wenn 20 Holzhauer in 7 Werktagen 130 Klafter Holz ausſtellen, mit wie viel werden 12 Holzhauer in 11 Tagen fertig ſeyn können?

130	x
12	20
11	7

$13 \times 6 \times 11 = 858 = 7x$. Alſo $x = 122\frac{4}{7}$ Klaft.

Wenn

Wenn das Fuhrlohn für 12 Klaftern eine Meile weit zu führen 10 Gulden 36 Kreuzer koſtet, wie hoch werden 60 Klaftern, die man 3 Meilen weit führen ſoll, zu ſtehen kommen?

$10\frac{3}{5}$	x
60	12
3	1

$$15 \times 10\tfrac{3}{5} = 150 + \frac{15 \times 3}{5} = 150 + 9 = 159 = x;$$

§. 178. Anmerkung. Die Zuſammenſetzung der Proportionen kann auch noch bey der ſogenannten Kettenregel angewandt werden. Z. B. wie viel Londner Fuß machen 16 Baieriſche Fuß?

Wenn 1391 Baieriſche = 1294 Rheiniſche
1440 Rheiniſche = 1391 Pariſer
1000 Pariſer = 1065 Londner
ſind.

Ich nenne hier die Zahlen welche den nämlichen Namen haben ähnlich z. B. 1294 Rheiniſche und 1440 Rheiniſche. Die Zahlen aber die in der nämlichen Gleichung ſich

befinden, nenne ich Zahlen, die miteinander verglichen werden, z. B. 1319 Baieriſche werden mit 1294 Rheiniſchen verglichen. Dieſes vorausgeſetzt, ſo ſind die Regeln des Anſatzes folgende:

16 Bairiſche	x Londner
1294 Rheiniſche	1391 Baieriſche
1391 Pariſer	1440 Rheiniſche
1065 Londner	1000 Pariſer.

15/31 . . = x.

I. Man ſchreibe die unbekannte Zahl oder x rechter, oder linkerhand eines Vertikalſtriches oben an.

II. Auf die andere Seite ſchreibe man die Zahl welche mit ihr verglichen wird.

III. Auf die Seite von x wieder diejenige, welche der nach II. angeſetzten ähnlich iſt.

IV. Auf die andere Seite, welche mit der nach III. angeſetzten verglichen wird ꝛc.

und ſo fahre man fort, bis man zu Ende iſt. Die zuletzt geſchriebene Zahl muß der unbekannten oder x ähnlich ſeyn, außerdem fehlt ein zur Auflöſung nöthiges Zwiſchenverhältniß.

V. Im übrigen was die Rechnung ſelbſt betrift, ſo behandle man die Aufgabe, wann der Anſatz gemacht iſt, wie §. 173. bey der Reeſiſchen Regel gelehrt worden iſt. Ich finde nach allen Reduktionen x = 15,31 . . .

Beweis. Man ſehe jede Zahl als ein Produkt aus derſelben in 1 Fuß an, welcher ihr den Namen giebt, z. B. 16 Baieriſche Fuße iſt = 16×1 Baieriſcher Fuß: ſo iſt vermöge dem was gegeben iſt, und dem Anſatze nach den gegebenen Regeln:

16×1 Baieriſche Fuß = x×1 Londner Fuß
1294×1 Rhein. Fuß = 1391×1 Baier. Fuß
1391×1 Pariſ. Fuß = 1440×1 Rhein. Fuß
1065×1 Londn. Fuß = 1000×1 Pariſ. Fuß.

Man

Man multiplizire alles, was linkerhand der Gleichheitszeichen ſich beſindet, miteinander, und ſo auch alles, was rechterhand derſelben ſteht; ſo werden die Produkte gleich ſeyn, weil man Gleiches mit Gleichem multiplizirt. Alſo hat man 16 × 1294 × 1391 × 1065 × 1 Baieriſche × 1 Rhein. × 1 Pariſ. × 1 Londner = x × 1391 × 1440 × 1000 × 1 Londner × 1 Baier. × 1 Rhein. × 1 Pariſer; dividirt man beyderſeits mit 1 Baier. × 1 Rhein. × 1 Par. × 1 Londer, ſo erhält man 16 × 1294 × 1391 × 1065 = x 1391 × 1440 × 1000 das iſt aber eben das, was die Regel des Anſatzes giebt.

§. 179. Anmerkung. Die Kettenregel wird häufig bey Wechſelrechnungen, bey Vergleichungen von Geldern, Gewichtern, Maaßen ꝛc. gebraucht.

Von Logarithmen.

§. 180. Erklärung. Eine Reihe von Gliedern, wo jedes Glied, wenn es durch ſein nächſt vorhergehendes dividirt wird, einen

nen gleichen Quotienten giebt; heißt eine geometriſche Progreſſion. Z. B. $a^{-4} : a^{-3} : a^{-2} : a^{-1} : a^{0} : a^{1} : a^{2} : a^{3} : a^{4}$. §. 98.

§. 181. Zuſatz. Alſo ſind die Verhältniſſe jeder zwey Glieder, die aufeinander folgen, in der geometriſchen Progreſſion gleich.

§. 182. Zuſatz. Jeder Exponent in der Reihe §. 180. zeigt an, wie viel gleiche Verhältniſſe von a^{0} bis zur Größe hin ſind, deren Exponent er iſt. So ſind von a^{0} bis a^{3} drey Verhältniſſe, nämlich $a^{0} : a^{1} = a^{1} : a^{2} = a^{2} : a^{3}$. Eben ſo ſind auf der entgegengeſetzten Seite z. B. von a^{0} bis a^{-2} zwey Verhältniſſe $a^{-2} : a^{-1} = a^{-1} : a^{0}$.

§. 183. Erklärung. Ein Logarithm heißt, dem Urſprunge, und der Zuſammenſetzung des Wortes nach, ein Verhältnißzehler.

§. 184. Zuſatz. Weil die Exponenten in der Reihe §. 180. die Menge der gleichen Verhältniſſe angeben, die von a° bis zur Größe hingezehlt werden können, zu der ſie gehören; ſo ſind ſie Logarithmen ihrer Größen über denen ſie in der Reihe §. 180. ſtehen.

§. 185. Zuſatz. Setzt man $a = 10$ ſo ſtellt N die Reihe M in dem Falle

$$M = a^{-4} : a^{-3} : a^{-2} : a^{-1} : a^{0} : a^{1} : a^{2} : a^{3} : a^{4} \text{ ꝛc.}$$

$$N = 10^{-4} : 10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 10^{0} : 10^{1} : 10^{2} : 10^{3} : 10^{4} \text{ ꝛc.}$$

$$P = \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \text{ ꝛc.}$$

$$Q = -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4 \text{ ꝛc.}$$

vor, wo $a = 10$ iſt. Die Reihe P giebt ihre Werthe §. 100. und Q die jedem Gliede der Reihe P zugehörige Exponenten oder Logarithmen an.

§. 186. Zuſatz. Wenn alſo $a = 10$ iſt, ſo iſt der Logarithm jeder Zahl n, eigentlich derjenige ganze oder gebrochene Exponent, welcher anzeigt, zu welcher Potenz man 10 erheben müße, um eine Zahl zu erhalten, die der Zahl n gleich wäre.

§. 187. Zuſatz. Weil der Exponent von 10°, das iſt 0, der Logarithm von $10^\circ = 1$ §. 99. iſt, ſo iſt der Logarithm von $1 = 0$. Zahlen aber die größer als 1 ſind, haben poſitive, und Zahlen, die kleiner als 1, das iſt, Brüche ſind, negative Logarithmen.

§. 188. Zuſatz. Wenn $a = 10$ iſt, ſo iſt der Logarithm für $1 = 0$ für $10 = 1$. Alſo ſind die Logarithmen der Zahlen die zwiſchen 1 und 10 fallen, größer als 0 und kleiner als 1, das iſt, wahre Brüche. Eben ſo, weil Log. $10 = 1$ und Log. $100 = 2$ iſt, ſo ſind die Logarithmen für Zahlen, die größer als 10 und kleiner als 100 ſind, größer als 1 aber kleiner als 2, das iſt, jeder 1

und

und ein wahrer Bruch. Aus gleichen Gründen ſind die Logarithmen der Zahlen, die zwiſchen 100 und 1000 fallen jeder 2 und ein wahrer Bruch ꝛc. Die 0 oder die ganzen Zahlen der Logarithmen nennt man die Kennziffer; weil man aus ihnen erkennt, zwiſchen was für zwo Potenzen von 10 die einem jeden Logarithme zugehörige Zahl fällt.

§. 189. Zuſatz. Die mittlere geometriſche Proportionalzahl zwiſchen 10^0 und 10^1 oder 1 und 10 iſt $= \sqrt{1 \times 10}$ §. 158. $= \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$ §. 94. alſo iſt $\frac{1}{2}$ der Logarithm von der mittleren geometriſchen Proportionalzahl zwiſchen 10^0 und 10^1. Aber $\frac{1}{2}$ iſt die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen den Exponenten von 10^0 und 10^1, folglich wenn zwo Zahlen überhaupt n und m, ihre Exponenten x und y heißen, ſo iſt die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen x und y der Logarithm der mittleren geometriſchen Proportionalzahl zwiſchen n und m. Sucht man daher zwiſchen den Gliedern der Progreſſion N §. 185. ſo lange

mitt-

mittlere geometriſche und für ihre Exponenten mittlere arithmetiſche Proportionalzahlen, bis man eine mittlere geometriſche erhält, welche einer gegebenen Zahl gleich iſt, ſo iſt der dazu gehörige Exponent der Logarithm derſelben. Auf ſo eine müheſame und weitläuftige Art, wovon in einigen Ulacquiſchen Tafeln ein Beyſpiel für den Log. 9 ſteht, hat man anfangs die Logarithmen der Zahlen auf viele Dezimalſtellen berechnet, wovon in den Tafeln gemeiniglich nur ſieben nach der Kennziffer angefügt ſind, weil damals andere Kunſtgriffe, die ſpäter erfunden worden ſind, noch unbekannt waren.

§. 190. Anmerkung. Ich kann mich hier in keine Beſchreibung von verſchiedenen Logarithmen-Tafeln einlaſſen, weil meine Abſicht bloß auf ihren Gebrauch gerichtet iſt. Genug, wir beſitzen mehrere derſelben, welche wir eigentlich dem Fleiße unſerer Voraltern zu danken haben, wovon einige neuere z. B. die Schulziſchen bis 101000, einige bis 20000tauſend, die kleinern aber nebſt den Tabulis ſinuum

&c.

&c. die Logarithmen der natürlichen Zahlen gemeiniglich nur von 1 bis 10000 enthalten, und die Ulacquiſchen vor andern für die korrekteſten gehalten werden. Was ihre Einrichtung betrift, ſo ſtehen, wann man die gegebenen Zahlen in den Tafeln aufſucht, gemeiniglich die denſelben zugehörige Logarithmen darneben. Sucht man im Gegentheil gegebene Logarithmen in den Tafeln, ſo findet man bey denſelben auch die Zahlen, welche ihnen zugehören. Aber die jeder einzelnen Tafel eigene Einrichtung läßt ſich leichter und beſſer wirklich zeigen, als mit vielen Worten ohne dieſelben vor ſich zu haben, beſchreiben.

§. 191. Zuſatz. Weil die Logarithmen Exponenten ſind §. 185. ſo findet man den Logarithm des Produkts, wenn man die Logarithmen addirt. §. 88. Man ſuche alſo die Logarithmen der gegebenen Faktoren in den Tafeln auf, addire ſie zuſammen, was herauskömmt, iſt der Logarithm des Produkts, und wenn er in den Tafeln aufgeſucht

ſucht wird, ſo wird die Zahl, welche daneben ſteht, das Produkt der Zahlen ſeyn, wovon man die Logarithmen addirte.

Exempel.

Log. 136 = 2,1335389.

Log. 24 = 1,3802112

Log. 136 + Log. 24 = 3,5137501 = Log 3264
= Log. 136 × 24.

§. 192. Zuſatz. Den Logarithm des Quadrats, Kubus, und jeder Potenz findet man, wenn man den Logarithm der Wurzel mit 2, 3 oder derjenigen Zahl multiplizirt, welche die Potenz anzeigt, zu der die Wurzel erhoben werden ſoll. §. 90. 91. 92.

Exempel. Log. 7 = 0,8450080 alſo Log. 7^4 = 4 Log. 7 = 0,8450980 × 4 = 3,3803920 = Log. 2401 = Log. 7×7×7×7.

§. 193. Zuſatz. Im Gegentheile findet man den Logarithm der Quadrat- Kubik- oder jeder andern Wurzel, wenn man

den

den Logarithm des Quadrats, Kubus oder einer Potenz überhaupt, durch 2, 3 oder diejenige Zahl dividirt, welche die Wurzel anzeigt, die ausgezogen werden ſoll. §. 94.

Exempel. Log. 9261 = 3,9666579. Alſo Log. $\sqrt[3]{9261} = \frac{1}{3}$ Log. 9261 $= \frac{3,9666579}{3}$ = 1,3222193. = Log. 21.

§. 194 Zuſatz. Den Logarithm eines Quotienten findet man, wenn man den Logarithm des Diviſors von dem des Dividendi abzieht. §. 98.

Exempel. Log. $\frac{4536}{72}$ = Log. 4536 — Log. 72 es iſt aber Log. 4536 = 3,6566730 Log. 72 = 1,8573325 alſo Log. $\frac{4536}{72}$ = 3,6566730 — 1,8573325 = 1,7993405 = Log. 63.

§. 195. Zuſatz. Wann Afterbrüche vorkommen, ſo ziehe man den Logarithm des Nenners von dem des Zehlers ab, der Reſt iſt der Logarithm des Afterbruches. § 194. Aber weil für wahre Brüche die Nen-

ner größer als ihre Zehler ſind, alſo auch der Logarithm des Nenners größer als der des Zehlers iſt, ſo muß man den Logarithm des Zehlers von dem Logarithme des Nenners abziehen, und den Reſt negativ ſetzen, im übrigen aber dergleichen Logarithmen wie negative Größen behandeln.

§. 196. Anmerkung. Bey dem Gebrauche der Logarithmen ſucht man in den Tafeln entweder für gegebene Zahlen ihre Logarithmen oder für gegebene Logarithmen die denſelben zugehörige Zahlen. Nun enthalten aber die kleinern Tafeln die Logarithmen nur für ganze Zahlen, und nicht weiter als von 1 bis 10000. Folglich enthalten die Tafeln keine Logarithmen für wahre Brüche, für Afterbrüche, für Zahlen die größer als 10000 ſind. Wann dahero negative Logarithmen, Logarithmen welche Afterbrüchen zugehören, Logarithmen von Zahlen die größer als 10000 ſind, vorkommen, oder zu Zahlen die größer als 10000 ſind, ihre Logarithmen geſucht werden ſollen, ſo fragt ſich,

wel-

welchen Gebrauch man von den Tafeln in ſolchen Fällen machen müße ? — Dieſes werden folgende Aufgaben zeigen.

§. 197. Aufgabe. Ein negativer Logarithm iſt gegeben, man ſoll mit Hülfe der Tafeln den Werth des Bruches finden, dem er zugehört.

Auflöſung. I. Man addire zu den negativen Logarithmen einen poſitiven, der größer als der negative iſt, und deſſen zugehörige Zahl man aus den Tafeln oder ſonſt kennt. Weil der poſitive Logarithm größer als der negative iſt, ſo wird ihre Summe allzeit poſitiv ſeyn, und die demſelben zugehörige Zahl in den Tafeln geſucht werden können.

II. Dividirt man die Zahl, welche der Summe des poſitiven und negativen Logarithm entſpricht, durch diejenige, welche dem poſitiven Logarithme, den man addirte, zugehört, ſo giebt der Quotient den Werth des Bruches, den man ſuchte.

Exempel.

Exempel. Der negative Logarithm ſey $-0,0969100$. Man addire den Log. $100 = 2$ dazu, ſo iſt ihre Summe $2 - 0,0969100 = 1,9030900$ der Logarithm von 80 folglich der Bruch, welcher dem negativen Logarithm $- 0,0969100$ entſpricht $= \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Beweis. Die Summe des poſitiven und negativen Logarithm iſt der Logarithm des Produkts aus der Zahl welche dem poſitiven Logarithme entſpricht in den Bruch, deſſen Werth gefunden werden ſoll. §. 191. Sucht man ihn in den Tafeln, ſo findet man dieſes Produkt ſelbſt in Zahlen, folglich, wenn man daſſelbe durch den bekannten Faktor, deſſen Logarithmen man addirte, dividirt, ſo muß der Quotient den anderen geben, welcher der Bruch iſt, den man ſuchte.

§. 198. **Anmerkung.** Selten findet man die Logarithmen, welche bey Rechnungen mit denſelben herauskommen, ganz genau in den Tafeln: Sie fallen meiſtens zwi-

ſchen zween die in den Tafeln ſind, wovon der eine kleiner, der andere größer iſt, als derjenige, den man aufſucht. So iſt z. B. der Logarithm 2,9654327 größer als Log. 923 und kleiner, als Log. 924. Dieſes zeigt an, daß die Zahl, welche dem Logarithm 2,9654327 entſpricht, 923, und ein wahrer Bruch ſey. Man ziehe alſo den Log. 923 = 2,9652017 von Log. 924 = 2,9656720, deſſen zugehörige Zahl um 1 größer iſt, und auch von dem gegebenen 2,9654327 ab. Jene Differenz iſt 4703, dieſe 2310. Man ſchließe: Wenn die Logarithmen um 4703 unterſchieden ſind, ſo iſt der Unterſchied der Zahlen 1, was iſt der Unterſchied der Zahlen, wenn der ihrer Logarithmen 2310 iſt? — Der Bruch $\frac{2310}{4703}$ = 0,49 . . . §. 62. welcher herauskömmt, iſt derjenige, den man noch zu 923 addiren muß, folglich iſt 2,9654327 der Logarithm von 923,49. Man nimt hier an, daß ſich bey zween aufeinander folgenden Logarithmen der Tafeln für diejenigen, die zwiſchen

die-

dieſelben fallen, die Aenderungen verhalten, wie die Aenderungen der Zahlen, zu denen ſie gehören.

§. 199. Anmerkung. Wenn die Kennziffer des Logarithm, den man aufſucht, 0 oder 1 oder 2 iſt, ſo kann man eben denſelben Logarithm unter einer höheren Kennziffer aufſuchen. Iſt die Kennziffer, bey welcher man den Logarithm aufſucht, um 1 oder 2 oder 3 höher, als die des gegebenen Logarithm, ſo erhält man das Zehen- Hundert- oder Tauſendfache von dem was man eigentlich ſucht, welches, wenn es durch 10, oder 100, oder 1000 dividirt wird, wieder das Einfache oder das Geſuchte giebt. Z. B wenn man den vorigen Logarithm 2,9654327 unter denen, welche zur Kennziffer 3 haben, in den Tafeln aufſucht, ſo iſt der nächſt kleinere Logarithm der Tafeln der von 9234. Alſo die geſuchte Zahl $\frac{9234}{10} = 923,4$. Sucht man daher einen gegebenen Logarithm unter einer höhern Kennziffer auf; ſo muß man von der Zahl, welche demſelben entſpricht, ſo viele

Ziffer zu Dezimalen abſchneiden, als die Kennziffer, unter welcher man ihn aufſuchte, mehr Einheiten hat, als die Kennziffer des gegebenen.

§. 200. Aufgabe. Wenn die Tafeln die Logarithmen nur für die Zahlen von 1 bis 10000 enthalten, für Zahlen die größer als 10000 aber kleiner als 10000000 ſind, die zugehörigen Logarithmen zu finden, z. B. für 567374.

Auflöſung. I. Man ſuche für die erſten vier Ziffer die gegebene Zahl, das iſt, für 5673 den Logarithm in den Tafeln, und auch für die Zahl, die um 1 größer iſt, nämlich für 5674, ſo findet man Log. 5673 = 3,7538128 und Log. 5674 = 3,7538893.

II. Die Zahlen 5673 und 5674 multiplizire man mit 10 oder 100 oder 1000, zu ihren Logarithmen aber addire man den Log. 10 oder Log. 100 oder Log. 1000, je nachdem

dem die gegebene Zahl aus fünf, ſechs, oder ſieben Ziffern beſteht, ſo erhält man in unſern Beyſpiel Log. 567400 = 5,7538893 und Log. 567300 = 5,7538128. §. 191.

III. Die kleinere Zahl 567300 ziehe man von der größern 567400 und der gegebenen 567374 ab, und ſo auch den Log. 567300 von dem Log. 567400, ſo findet ſich 567400 — 567300 = 100; ferners 567374 — 567300 = 74 und Log. 567400 — Log. 567300 = 5,7538893 — 5,7538128 = 0,0000765.

IV. Man ſchließe: Wenn der Unterſchied der Zahlen 100 iſt, ſo iſt der ihrer Logarithmen 765 Zehenmilliontheilchen; was iſt der Unterſchied der Logarithmen, wenn der von ihren Zahlen 74 iſt? Das vierte Proportionalglied $\frac{765 \times 74}{100} = 566,10$ giebt den Unterſchied zwiſchen dem Log. 567300 und Log. 567374 in Zehnmilliontheilchen an.

V. Man laſſe bey den 566,10 Zehnmilliontheilchen den Bruch 0,10 weg, weil die Tafeln nicht weiter als bis auf ſieben Dezimalſtellen reichen, und addire 0,0000566 zu dem Log. 567300, ſo hat man Log. 567374 = 5,7538128 + 0,0000566 = 5,7538694.

§. 201. Aufgabe. Für Logarithmen, deren Kennziffer 4, 5 oder 6 ſind, die zugehörigen Zahlen durch Hülfe der kleinern Tafeln, welche die Logarithmen nur bis 10000 enthalten, zu finden. Z. B. für 5,7538694.

Auflöſung. I. Man ſuche den gegebenen Logarithm unter der höchſten Kennziffer der kleinern Tafeln, das iſt, 3 auf; und ſchreibe ſich die zween Logarithmen, zwiſchen welche er fällt, heraus. Sie ſind in unſern Beyſpiel Log. 5673 = 3,7538128 und Log. 5674 = 3,7538893.

II. Man multiplizire die Zahlen dieſer Logarithmen mit 10 oder 100 oder 1000, zu den Logarithmen ſelbſt aber addire man Log. 10 oder Log. 100 oder Log. 1000, je nachdem die Kennziffer des gegebenen um 1, 2 oder 3 Einheiten größer iſt, als 3. So erhält man hier Log. 567300 = 5,7538128 und Log. 567400 = 5,7538893. §. 191.

III. Man ziehe die kleinere Zahl 567300 von der größeren 567400 ab, und ſo auch den Log. 567300 von Log. 567400 und dem gegebenen 5,7538694, ſo erhält man 567400 — 567300 = 100, Log. 567400 — Log. 567300 = 5,7538893 — 5,7538128 = 0, 0000765. und 5,7538694 — 5,7538128 = 0,0000566.

IV. Man ſchließe: Wenn der Unterſchied der Logarithmen 765 Zehenmilliontheilchen iſt, ſo iſt der Unterſchied ihrer Zahlen 100, was iſt der Unterſchied der Zahlen, wenn der ihrer Logarithmen 566 Zehnmilliontheilchen iſt?

iſt? Das vierte Proportionalglied $\frac{566 \times 100}{765}$ das beynahe 74 iſt, giebt den Unterſchied zwiſchen der Zahl 567300 und derjenigen, welche der gegebene Logarithm 5,7538694 zugehört.

V. Man addire alſo 74 zu 567300, die Summe, welche 567374 iſt, wird die Zahl ſeyn, deſſen Logarithm = 5,7538694 iſt.

Die Urſache, warum die vierte Proportionalzahl Nro. IV. nicht genau 74 giebt, wie man doch aus §. 200. einſieht, daß es ſeyn ſollte, liegt in dem daſelbſt weggelaſſenen Bruch 0,1, denn $\frac{566,1 \times 100}{765}$ iſt genau = 74.

§. 202. Anmerkung. Wer von verſchiedenen Tafeln, und von ihrer Einrichtung, von dem Gebrauche der Proportionaltheile bey Logarithmen ꝛc. mehr zu wiſſen verlangt; kann ſich ſowohl in Hrn. Hofrath Käſtners Anfangs-

fangsgründen, als deſſen Fortſetzung der Rechenkunſt Seite 79 ꝛc. mehr unterrichten, wo der Herr Hofrath mit einer ihm eigenen Gründlichkeit und bekannten litterariſchen Kenntniß hievon handelt. Was den Nutzen der Logarithmen betrift, den wird wohl Niemand bezweifeln, der ihren Gebrauch kennt, und ſonſt viel zu rechnen hat. Nichts zu ſagen von ihrem Gebrauche in trigonometiſchen Rechnungen, bey Aufgaben, wo die Exponenten der Potenzen unbekannt ſind, und geſucht werden, als bey welchen ſie unentbehrlich ſind; ſo ſind die Rechnungen mit den Logarithmen, wo man in Zahlen multipliziren, dividiren, oder Wurzeln ausziehen müßte, nicht nur leichter, wie aus dem, was bisher von ihnen gelehrt worden iſt, erhellt; ſondern auch eben darum der Gefahr der Rechnungsfehler weniger unterworfen.

Zugabe.

§. 203. **Erklärung.** Eine Zahl die größer wäre, als jede die ſich angeben läßt, heißt eine unendlich große Zahl.

§. 204. Zuſatz. Wenn das Zeichen einer unendlich großen Zahl ∞ iſt, ſo iſt $\infty^2 = \infty \times \infty$ unendlichmal größer als ∞, folglich ∞ unendlichmal kleiner als ∞^2. Eben ſo iſt $\infty^3 = \infty^2 \times \infty$ unendlichmal größer als ∞^2, folglich ∞^2 in Rückſicht von ∞^3 unendlich klein.

§. 205. Zuſatz. Weil ∞ in Rückſicht von ∞^2 und ∞^2 in Rückſicht von ∞^3 unendlich klein iſt, ſo vermehren oder vermindern ein oder etliche ∞ das ∞^2 und ein oder etliche ∞^2 das ∞^3 um keine Größe die ſich angeben ließe; alſo iſt $\infty^2 \pm n\,\infty = \infty^2$ und $\infty^3 \pm n\,\infty^2 = \infty^3$; wo n jede endliche beſtimmte Zahl bedeuten kann.

§. 206. Aufgabe. a, b, c, d, e ſeyen Zahlen, deren jede folgende um 1 größer iſt, als ihre vorhergehende; man ſucht aus allen vorhergehenden a, b, c, d einen Ausdruck für das Quadrat und den Kubus der letzten und größten Zahl e.

Auf-

Auflöſung. Nach den Bedingniſſen der Aufgabe iſt:

$$\begin{array}{ll} a+1=b \text{ alſo } & a^2+2a+1=b^2 \\ b+1=c & b^2+2b+1=c^2 \\ c+1=d & c^2+2c+1=d^2 \\ d+1=e. & d^2+2d+1=e^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{und } a^3+3a^2+3a+1=b^3 \\ b^3+3b^2+3b+1=c^3 \\ c^3+3c^2+3c+1=d^3 \\ d^3+3d^2+3d+1=e^3. \end{array}$$

Setzt man ſtatt d^2, c^2, b^2 bey den Quadraten, und ſtatt d^3, c^3, b^3 bey den Kubis ihre Werthe nach und nach in die letztern Gleichungen, ſo erhält man:

$$\begin{array}{ll} e^2=a^2+2a+1 & e^3=a^3+3a^2+3a+1 \\ \quad 2b+1 & \quad 3b^2+3b+1 \\ \quad 2c+1 & \quad 3c^2+3c+1 \\ \quad 2d+1 & \quad 3d^2+3d+1. \end{array}$$

Folglich beſteht das Quadrat des letzten und größten Gliedes aus dem Quadrate des

erſten,

erſten, der doppelten Summe aller Glieder, welche vor dem letzten gehen, und der Anzahl der Glieder weniger 1. Und der Kubus des letzten Gliedes aus dem Kubus des erſten, der dreyfachen Summe der Quadraten aller Glieder, welche vor dem letzten gehen, der dreyfachen Summe eben dieſer Glieder, und aus der Anzahl aller Glieder weniger 1.

§. 207. Zuſatz. Das erſte Glied ſey $= a$. Das letzte $= z$. Die Anzahl der Glieder $= n$, die Summe aller Glieder $= S$ die Summe der Quadraten aller Glieder $= Sq$. So wird $S - z$ die Summe aller Glieder weniger dem letzten und $Sq - z^2$ die Summe der Quadraten aller Glieder bedeuten, welche vor dem letzten gehen. Alſo erhält man

$$z^2 = a^2 + 2(S - z) + n - 1$$

$$z^3 = a^3 + 3(Sq - z^2) + 3(S - z) + n - 1.$$

§. 208. Zuſatz. Wenn das erſte Glied oder $a = 1$ iſt, ſo iſt das letzte z und die Anzahl der Glieder n einerley oder $z = n$. Z. B. in der Reihe 1. 2. 3. 4. 5. iſt ſowohl die Anzahl der Glieder als das letzte Glied $= 5$.

§. 209. Zuſatz. Es ſey $a = 1$ alſo $z = n$ §. 208. und $z^2 = 1 + 2S - 2z + 1 = 2S - z$ §. 207. In der Gleichung $z^2 = 2S - z$ addire man beyderſeits z, ſo iſt $z^2 + z = 2S$.

§. 210. Zuſatz. Wenn die Anzahl der Glieder unendlich groß, und das erſte 1 iſt, ſo iſt $z = \infty$ folglich verſchwindet z in Rückſicht von z^2 §. 205. und es iſt in dieſem Falle $2S = z^2$ oder $S = \frac{1}{2}z^2$.

§. 211. Zuſatz. Es ſey abermal $a = 1$ alſo $z = n$ und $z^3 = 1 + 3S^q - 3z^2 + 3S - 3z + z - 1 = 3S^q - 3z^2 + 3S - 2z$ §. 207. addirt man in der Gleichung $z^3 = 3$

$S^q - 3z^2 + 3S - 2z$ beyderſeits $3z^2 - 3S + 2z$ ſo wird $z^3 + 3z^2 - 3S + 2z = 3S^q$.

§. 212. Zuſatz. Setzt man die Anzahl der Glieder unendlich groß oder $z = \infty$ und für dieſen Fall $S = \frac{z^2}{2}$; ſo wird die letzte Gleichung des vorhergehenden §s in folgende verwandelt $z^3 + 3z^2 - 3 \times \frac{z^2}{2} + 2z = 3S^q$: Wo alle Glieder in Rückſicht von z^3 verſchwinden §. 205. Man hat alſo in dieſem Falle $z^3 = 3S^q$, und $\frac{z^3}{3} = S^q$. Das iſt: **Wenn jedes folgende Glied einer Reihe um 1 größer iſt, als ſein vorhergehendes, das erſte Glied ſelbſt = 1; die Anzahl der Glieder aber unendlich groß iſt; ſo wird die Summe der Quadraten aller Glieder $\frac{1}{3}$ vom Kubus des letzten Gliedes ſeyn.**

Die

Die Geometrie.

§. 1. Wenn in dem Raume, worinn eine Größe ſich befindet, nichts iſt, was nicht zu ihr gehörte, und das End eines jeden Theils zugleich der Anfang eines anderen iſt; ſo heißt die Größe ſtetig.

§. 2. Wenn eine ſtetige Größe einen Raum nach allen Seiten bis an ſeine Grenzen hin ausfüllt; ſo heißt dieſes ein *geometriſcher Körper*. Die Grenze des Körpers oder das Aeußerſte um denſelben heißt eine *Fläche*. Denkt man ſich in der Fläche Grenzen; ſo heißen dieſe Grenzen *Linien*, und die Grenze oder das Aeußerſte einer Linie wo ſie aufhört, *ein Punkt*.

§. 3. Anmerkung. Die Grenze enthält nichts von der Größe deren Grenze ſie iſt. Denn eben darum iſt ſie das Aeußerſte, weil nichts von der Größe zu ihr gehört.

Und

Und wo wäre die Grenze, wenn ſelbſt ſie wieder Grenzen und Theile von dem hätte, wovon ſie die Grenze iſt? Daher ſind die Theile eines Körpers Körper, die Theile der Flächen wieder Flächen, und die Theile der Linien auch Linien.

§. 4. Anmerkung. Man ſagt insgemein, was in die Länge, Breite und Dicke ausgedehnt iſt, ſey ein Körper. Dasjenige deſſen Ausdehnung nur in die Länge und Breite geht, ſey eine Fläche, und was in der Länge allein ausgedehnt iſt, ſey eine Linie; wo die Worte Länge, Breite und Dicke zwar nur eine Ausdehnung in die Länge, aber doch nach verſchiedenen Richtungen bedeuten.

§. 5. Wenn ſchon die Linien nicht aus Punkten, die Flächen nicht aus Linien, und die Körper nicht aus einer Menge von Flächen als Theilen beſtehen, ſo können doch Linien durch die Bewegung eines Punktes, Flächen durch die Bewegung einer Linie,

und

und Körper durch die Bewegung einer Fläche entſtehen; denn die Bewegung eines Punktes mag ſo klein ſeyn, als man will, ſo iſt das was durch eine noch ſo kleine Bewegung entſteht, nicht ein Punkt, ſondern eine Linie. Eben dieſes gilt in Rückſicht der Flächen und Körper, wenn ſie durch die Bewegung von Linien und Flächen erzeugt werden.

§. 6. Erklärung. Wenn alle Theile einer Linie nach einerley Richtung hinliegen, ſo heißt ſie gerade. Wenn kein, auch noch ſo kleiner Theil gerade iſt, ſo heißt die Linie eine krumme.

§. 7. Zuſatz. Jede zween Punkte beſtimmen die Lage einer geraden Linie.

§. 8. Erklärung. Eine ebene Fläche iſt, wo, wenn man von jedem Punkt zu einem andern eine gerade Linie zieht, alle Punkte der Linie in der Fläche liegen. Krumme iſt die Fläche, wenn kein Theil eben iſt.

§. 9. Anmerkung. Eine mathematiſche Linie läßt ſich nicht ſinnlich vorſtellen. Wir pflegen bey den Linien, die wir mit Federn oder dem Bleyſtift ziehen, beynahe nichts als etwa die Richtung einigermaſſen nachzuahmen. Ein Bild von einer ebenen Fläche kann ein Theil der Oberfläche eines ſtillſtehenden Waſſers geben.

§. 10. Erklärung. Wenn zwo Linien ab, cb Fig. 1. ſich in einer Ebene ſchneiden, ſo heißt ihre Neigung gegeneinander ein ebener Winkel. Der Punkt b heißt der Scheitel, ab, und bc die Schenkel deſſelben. Man deutet den Winkel durch drey Buchſtaben ſo an, daß der am Scheitel in die Mitte kömmt. Z. B. abc. Oder man ſetzt einen Buchſtabe z. B. m hinein, und nennt ihn den Winkel m, um ihn von andern zu unterſcheiden. Bisweilen deutet man den Winkel auch durch den Buchſtabe an, der am Scheitel ſteht.

§. 11. Erklärung. Wenn eine gerade Linie ab, von einer andern cd geſchnitten

wird

wird Fig. 2. ſo heißen die zween Winkel acd und dcb Nebenwinkel. Sind Fig. 3. die zween Nebenwinkel acd und dcb einander gleich, ſo heißt jeder ein rechter, die Linie cd aber ſenkrecht, lothrecht, perpendikulär. Ein Winkel der größer als ein rechter iſt z. B. acf heißt ein ſtumpfer, der kleiner iſt als ein rechter, ein ſpitziger.

§. 12. Zuſatz. Aus einem Punkt läßt ſich nur ein einziges Perpendikel errichten.

§. 13. Erklärung. Gleichlaufende oder Paralellinien ab, cd ſind gerade Linien, die in einer Ebene liegen, und ſo weit man ſie auch verlängert, nie zuſammen ſtoſſen. Fig. 4.

§. 14. Erklärung. Eine von Linien eingeſchloſſene Fläche heißt eine Figur. Sind die Linien gerade, ſo heißt die Figur geradlinicht, bey krummen Linien krummlinicht.

§. 15. Wenn ſich eine gerade Linie ca in einer Ebene um einen feſten Punkt c bewegt, ſo beſchreibt ſie einen Kreis oder Zirkel. Fig 5. Der Punkt c heißt der Mittelpunkt oder das Centrum; die Linie ca der Radius oder Halbmeſſer; die krumme Linie amdna, welche der Punkt a beſchreibt, die Peripherie oder der Umfang des Kreiſes; jeder Theil der Peripherie z. B. am ein Bogen. Zieht man von einem Punkt des Umfangs a bis zu einem andern m eine gerade Linie am, ſo heißt ſie eine Senne oder Corde. Die Senne, welche durch den Mittelpunkt geht, und zween Radien gleich iſt, heißt der Durchmeſſer oder Diameter. Die gerade Linie mf, welche den Kreis nur in einem Punkt berührt, ohne ihn zu ſchneiden, heißt eine Tangente. Den Raum zwiſchen zween Radien ca, cm und dem Bogen am, den ſie abſchneiden, nennt man einen Sektor oder Ausſchnitt; den Raum aber zwiſchen der Corde am und ſeinen Bogen ahm ein Segment oder Abſchnitt.

§. 16. Zuſatz. Alle Radien und Durchmeſſer eines Kreiſes ſind einander gleich.

§. 17. Die geradlinigten Figuren heißen nach der Anzahl ihrer Seiten dreyecke, Vierecke ꝛc. Vielecke. Man unterſcheidet die Dreyecke theils in Rückſicht ihrer Seiten, theils in Rückſicht ihrer Winkel. Sind alle drey Seiten gleich, ſo nennt man ſie gleichſeitig, Fig. 6. Wenn nur zwo Seiten gleich ſind, ſo heißen ſie gleichſchenklicht, Fig. 7; und wenn keine Seite der andern gleich iſt, ungleichſeitig. Fig. 8. Haben die Dreyecke einen ſtumpfen Winkel, ſo heißen ſie ſtumpfwinklicht, Fig. 9; wenn ſie einen rechten Winkel haben, rechtwinklicht, Fig. 10; und wenn alle drey Winkel ſpitzig ſind, ſpitzwinklicht. Fig. 11.

§. 18. Das Quadrat hat vier gleiche Seiten, und ſo viel rechte Winkel, Fig. 12; ein Rechteck, vier rechte Winkel, und die gegenüberſtehenden Seiten gleich, Fig. 13; Die Raute gleiche Seiten, aber keinen rech-

ten Winkel, Fig. 14; die länglichte Raute die gegenüberſtehende Seiten gleich, aber keine rechte Winkel. Fig. 15. Die übrigen vierſeitigen Figuren heißen Trapezen Fig. 16.

§. 19. Ein Parallelogram iſt eine vierſeitige Figur deren gegenüberſtehende Seiten parallel ſind. Fig. 17. Die Linie ac wodurch man die Scheitel zuſammenzieht, heißt die Diagonal.

§. 20. Reguläre Vielecke ſind, derer alle Seiten und Winkel gleich ſind.

§. 21. Aehnlich ſind die Figuren, wenn die Winkel in der nämlichen Ordnung gleich, und die Seiten proportional ſind.

Foderungen.

§. 22. 1. Von einem Punkt zum andern eine gerade Linie zu ziehen, und dieſelbe nach Gefallen zu verlängeren.

2. Mit jedem beliebigen Halbmeſſer einen Kreis zu beſchreiben.

Grundſätze.

§. 23. Die Grundſätze von welchen in der ganzen Mathematik überhaupt, und beſonders in der Geometrie ein häufiger Gebrauch gemacht wird, ſind folgende:

1. Jede Größe iſt ſich ſelbſt gleich. Zwo Größen die einer dritten gleich ſind, ſind unter ſich gleich. Was größer oder kleiner iſt, als eine von zwo gleichen Größen, iſt auch größer oder kleiner als die andere.

2. Gleiches zu Gleichem addirt, von Gleichem abgezogen, mit Gleichem multiplizirt oder dividirt, giebt Gleiches. Gleiches zu ungleichen Dingen addirt, davon abgezogen, damit multiplizirt, oder darein dividirt, giebt bey dem größern mehr als bey dem kleinern. Das Größere zum Gleichen addirt oder damit multiplizirt, giebt mehr als das Kleinere: aber

aber abgezogen oder in das Gleiche dividirt, weniger.

Anmerkung. Da ſich dieſe Grundſätze nicht kürzer faſſen laſſen, als Herr Hofrath Käſtner in ſeinen Anfangsgründen gethan hat; ſo habe ich ſie mit ſeinen eigenen Worten vorgetragen.

3. Das Ganze iſt größer als jeder ſeiner Theile. Und das Ganze iſt allen Theilen zuſammgenommen gleich.

4. Gleiches kann man ſtatt Gleichen ſetzen.

5. Größen, welche genau in eben dem Raume hineinpaſſen, ſind gleich und ähnlich, und man ſagt von ihnen, ſie decken ſich.

6. Gerade Linien und Winkel die gleich ſind, decken einander.

7.

7. Alle rechte Winkel decken einander, weil ſie gleich ſind.

8. Zwo gerade Linien ſchließen keinen Raum ein. Denn ſtoſſen ihre Endpunkte zuſammen, ſo machen ſie eine einzige gerade Linie aus. §. 7.

9. Wenn ſich zwo gerade Linien ſchneiden, ſo geſchieht dieſes in einem einzigen Punkte, oder ſie haben nichts als einen Punkt gemein.

1. Satz. Aufgabe.

§. 24. Ueber einer gegebenen Linie ab Fig. 18. ein gleichſeitiges Dreyeck zu beſchreiben.

Aufloͤſung. Man beſchreibe aus a und b als Mittelpunkten mit ab und ba Kreiſe, die ſich irgendwo in c ſchneiden werden, und ziehe den Durchſchnittspunkt c mit a und b zuſammen.

Be-

Beweis. Weil ab = ac = bc als Radien von gleichen Kreiſen §. 16.: ſo ſind alle drey Seiten einander gleich, und das Dreyeck gleichſeitig.

2. Satz. Lehrſatz.

§. 25. Wenn der eingeſchloſſene Winkel, und die einſchließenden Seiten in einem Dreyeck ſo groß ſind, als in dem andern; ſo decken ſich die Dreyecke, oder es iſt in beyden alles gleich.

Beweis. Es ſey Fig. 19. abc = ABC, ab = AB, cb = CB. Man lege den Punkt b auf B und ba längſt BA, ſo wird, weil abc = ABC iſt, bc längſt BC und wegen ba = BA dann bc = BC der Punkt a auf A und c auf C fallen. §. 23. Nro. 6. Folglich auch ac auf AC. Alſo decken ſich alle Seiten, und das, was dazwiſchen enthalten iſt; oder es iſt in beyden Dreyecken alles gleich.

§ 26. Zuſatz. Man denke ſich das gleichſchenklichte Dreyeck ABC, wo AB = BC iſt, Fig. 20. Nro. 1. noch einmal, aber umgewandt CBA Nro. 2. weil CBA = ABC und AB = CB ferners CB = AB iſt, ſo muß der Winkel C den Winkel A decken; folglich müſſen in gleichſchenklichten Dreyecken die Winkel an der Seite, worüber die gleichen Schenkel ſtehen, und die man die Grundlinie nennt, gleich ſeyn.

3. Satz. Lehrſatz.

§. 27. Wenn in einem Dreyeck eine Seite mit den zween anliegenden Winkeln ſo groß iſt, als eine Seite und die anliegenden Winkel in dem andern, ſo decken ſich die Dreyecke, oder es iſt alles in beyden gleich.

Beweis. Es ſey Fig. 19. ac = AC, a = A, c = C. Legt man a auf A, und ac längſt AC; ſo decken ſich ac und AC. §. 23. Nro. 6. Weil aber a = A und c = C; ſo fällt ab längſt AB, und cb längſt

CB

CB folglich decken ſich alle Seiten, und das entzwiſchen Enthaltene; oder es iſt alles in beyden Dreyecken gleich.

§. 28. Zuſatz. Es ſey in dem Dreyeck ABC Fig. 20. Nro. 1. C = A. Man denke ſich dieſes Dreyeck noch einmal, aber umgewandt CBA Nro. 2. Weil CA = AC und C = A, A = C iſt; ſo muß △CBA das △ABC decken. §. 27. Alſo CB = AB ſeyn. Wenn alſo in einem Dreyeck zween Winkel gleich ſind; ſo ſind es auch die Seiten, welche dieſen Winkeln gegenüberſtehen.

§. 29. Zuſatz. Wenn in einem Dreyeck alle drey Winkel gleich ſind; ſo iſt es gleichſeitig, §. 28. und wenn alle drey Seiten gleich ſind; ſo ſind es auch alle drey Winkel. §. 26.

4. Satz. Lehrſatz.

§. 30. Die Nebenwinkel machen miteinander zween Rechte.

Be-

Beweis. Wenn Fig. 21. dc auf ab ſenkrecht ſtünde; ſo wäre die Sache für ſich klar. §. 11. Iſt aber cd ſchief; ſo wird es eine andere z. B. cf geben, die auf ab in c ſenkrecht iſt. Man heßie den rechten Winkel R: ſo iſt acf = bcf = R, acd = R + dcf und bcd = R — dcf; alſo acd + bcd = R + dcf + R — dcf = 2 R.

§. 31. Zuſatz. Wenn der eine Nebenwinkel ſpitzig iſt; ſo iſt der andere ſtumpf.

§. 32. Zuſatz. Alle Winkel an dem Punkt C über ab machen auf einer Seite derſelben nicht mehr als zween Rechte.

§. 33. Zuſatz. Alle Winkel um einen Punkt C herum in einer Ebene machen zuſammen vier Rechte.

§. 34. Zuſatz. Wenn man in einem gleichſchenklichten Dreyecke die zween Schenkel ab, und bc Fig. 22. unter die Grundlinie verlängert; ſo ſind auch die Winkel dac

und

und eca unter der Grundlinie einander gleich. Denn ſie ſind die Nebenwinkel von den gleichen Winkeln bac, und bca. §. 26.

§. 35. Zuſatz. Die Scheitelwinkel acd und ecb Fig. 23. ſind gleich. Denn acd + dcb = 2 R = dcb + bce §. 30. alſo acd + dcb = dcb + bce und acd = bce.

5. Satz. Lehrſatz.

§. 36. Wenn in einem Dreyeck die Seiten ſo groß ſind als in dem andern, das iſt, wenn Fig. 24. AC = ac. AB = ab CB = cb: ſo decken ſich die Dreyecke, oder es iſt in beyden Dreyecken alles gleich.

Beweis. Man lege a auf A und ac längſt AC, ſo wird c auf C fallen. §. 23. Nro. c. Aus A beſchreibe man mit ab aus C mit cb einen Bogen, ſo werden beyde Bögen durch B gehen, folglich ab und cb in B ſich ſchneiden, ab auf AB, und cb auf CB zu liegen kommen, folglich die Seiten der

Drey-

Dreyecke abc, und ABC, und was dazwiſchen liegt, einander decken, das iſt, alles in beyden Dreyecken gleich ſeyn.

§. 37. Anmerkung. Der Euclideiſche Beweis dieſes Satzes iſt folgender: Man mache alles wie zuvor; ſo könnte nur noch die Frage ſeyn, ob es nicht möglich ſey, daß der Durchſchnittspunkt b der Linien ab, cb irgend anderswohin falle als über B. Fällt b nicht über B, ſo fällt er entweder auf eine der zwoen Seiten AB, BC Fig. 25. Nro. 1. oder innerhalb des △ABC Nro. 2. oder außerhalb deſſelben Nro. 3.

I. Fall. Fällt b nicht auf B Fig. 25. Nro. 1. ſo kann ab nicht = AB ſeyn.

II. Fall. Fällt der Punkt b in das △ABC hinein, Fig. 25. Nro. 2. ſo ſind die △△ BAb, und BCb gleichſchenklicht, alſo $m + n = p$ §. 26. und $n = p + q$ §. 34. folglich ſtatt n in der erſten Gleichung deſſen Werth $p + q$ geſetzt, giebt $m + p + q = p$, welches nicht möglich iſt.

III.

III. Fall. Fällt b irgendwo außerhalb des △ ABC Fig. 25. Nro. 3. ſo ſind die △△ AbB und CbB gleichſchenklicht; alſo m + n = p und n = p + q. §. 26. Folglich wie in dem zweyten Fall m + p + q = p. Daher kann der Durchſchnittspunkt b nirgends anderswo ſeyn, als in B.

§. 38. Zuſatz. Im 2. 3. 5ten Satz ſtehen gleiche Seiten gleichen Winkeln, und gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber. Wenn man ihre Bedeckungen betrachtet, ſo iſt dieſes an ſich klar.

§. 39. Zuſatz. Aus den Sätzen 2. 3. 5 erhellet, daß ein Winkel und deſſen einſchließende Seiten, oder eine Seite und ihre anliegenden Winkel oder die drey Seiten eines Dreyeckes daſſelbe beſtimmen.

6. Satz. Aufgabe.

§. 40. Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Auf-

Auflöſung. Der Winkel ſey ABC Fig. 26. Man nehme BD = BE und mache über DE ein gleichſeitiges Dreyeck DFE §. 24; ſo wird BF den Winkel ABC halbiren.

Beweis. Durch die Zeichnung iſt BD = BE. DF = EF die Seite BF beyden △△ BDF, und BEF gemein; folglich ſind ſie gleich §. 36. Alſo DBF = EBF = $\frac{1}{2}$ ABC.

7. Satz. Aufgabe.

§. 41. Eine gegebene gerade Linie AB zu halbiren, Fig. 27.

Aufløſung. Man errichte über AB ein gleichſeitiges Dreyeck ABC, §. 24; und halbire den Winkel ACB, §. 40; die Linie, welche den Winkel halbirt, halbirt auch AB.

Beweis. Weil ACB halbirt, und △ ACB gleichſeitig iſt, ſo ſind die △△ ACE; und ECD gleich. Denn AC = BC, CE beyden Dreyecken gemein, und ACE = ECD; alſo AE = EB, §. 25.

§. 42. Zuſatz. Die Linie CE welche AB halbirt, ſteht auf AB ſenkrecht.

8. Satz. Aufgabe.

§. 43. Aus einem gegebenen Punkt C der Linie AB ein Perpendikel zu errichten, Fig. 28.

Auflöſung. Man nehme CE = CF und beſchreibe über CF ein gleichſeitiges Dreyeck EGF, §. 24; ſo wird GC auf AB ſenkrecht ſeyn.

Beweis. Durch die Zeichnung iſt EC = CF. EG = GF und GC den ΔΔ EGC und CGF gemein; alſo ſind dieſe Dreyecke gleich, §. 36. Folglich ECG = GCF, und GC ſenkrecht auf AB, §. 11.

9. Satz. Aufgabe.

§. 44. Von einem gegebenen Punkt C auf eine gegebene Linie AB ein Perpendikel zu fällen, Fig. 29.

Auf-

Auflöſung. Man beſchreibe aus C einen Kreis der AB irgendwo in E und F ſchneiden wird, und halbire den Winkel ECF; ſo wird die Linie CG, welche den Winkel halbirt, auf AB ſenkrecht ſeyn.

Beweis. Durch die Zeichnung iſt ECH = HCF; EC = FC und CH den beyden △△ ECH und FCH gemein; folglich ſind ſie gleich, §. 25. Alſo EHC = FHC; folglich CH auf AB ſenkrecht, §. 11.

10. Satz. Lehrſatz.

§. 45. Wenn man was immer für eine Seite des Dreyecks ABC, Fig. 30. z. B. AC verlängert; ſo iſt der äußere Winkel BCD größer als jeder der inneren entgegengeſetzten CBA oder CAB.

Beweis. Man halbire BC und AC in E und K, ziehe AF und BG unbeſtimmt aus, mache EF = AE, KG = BK und ziehe die Punkte F, C und C, G durch gera-

de Linien zuſammen. Weil durch die Zeichnung BE = EC. AE = EF iſt und BEA = FEC §. 35; ſo iſt △ BAE = △ FEC. §. 25; alſo ABE = ECF. Aber ECF iſt nur ein Theil von BCD; folglich BCD > ABC.

Auf eine ähnliche Art findet man, daß die △△ ABK und KCG gleich ſind, folglich BAK = KCG. Nun iſt ACH = BCD, §. 35; und ACG = BAC nur ein Theil von ACH; folglich iſt BCD = ACH > ACG = BAC.

§. 46. Zuſatz. Nach dem Lehrſatz iſt Fig. 31; d > a und d > b; folglich auch d+c > a+c und d+c > b+c. Aber weil eben ſo f > b, ſo muß auch f + a > b + a ſeyn. Daher weil ſowohl d + c als f + a zween Rechte ſind, § 30; ſo iſt die Summe jeder zween Winkel des Dreyecks allzeit kleiner als zween Rechte, und ein Dreyeck kann nicht mehr als einen ſtumpfen oder rechten Winkel haben.

§. 47. Zuſatz. Aus einem Punkt kann nur ein einziges Perdendikel auf eine Linie gefällt werden, weil ſonſt ein Dreyeck entſtünde, worinn zween rechte Winkel wären, wider §. 46.

§. 48. Zuſatz. Wenn eine gerade Linie CD Fig. 32. mit einer andern AB ungleiche Nebenwinkel macht, ſo fällt das Perpendikel DE auf die Seite des ſpitzigen Winkels, §. 46.

§. 49. Zuſatz. Alle Winkel in einem gleichſeitigen Dreyeck, und die zween gleiche Winkel in einem gleichſchenklichten Dreyeck, ſind ſpitzig.

§. 50. Zuſatz. Wenn AC > AB Fig. 33; ſo iſt auch ABC > ACB oder in jedem Dreyecke ſteht die größere Seite dem größern Winkel gegenüber. Man mache AD = AB; ſo iſt n > p. §. 45. Aber n = m §. 26; folglich m = n > p; alſo auch viel mehr ABC > ACB, §. 23. Nro. 3.

§. 51.

§. 51. Zuſatz. Wenn ABC > ACB; ſo iſt auch AC > AB oder in jedem Dreyeck ſteht der größere Winkel der größern Seite gegenüber. Denn weil ABC > ACB; ſo iſt AC nicht = AB, § 28. Wäre AB > AC, ſo müßte ACB > ABC ſeyn, folglich kann AB der AC weder gleich noch größer ſeyn, alſo iſt ſie kleiner.

§. 52. Zuſatz. In jedem Dreyeck iſt die Summe zwoer Seiten größer als die dritte Fig. 34. AB + AC > BC. Man verlängere AC bis AD = AB iſt, ſo wird p = q ſeyn, §. 26; folglich q + r > p; alſo in dem △ BDC die Seite DC > BC: Aber DC = DA + AC, und DA = AB. Daher DC = AB + AC und AB + AC > BC.

§. 53. Zuſatz. Wenn eine Linie AB Fig. 35, von zwo andern AC und BD ſo geſchnitten wird, daß die zween anliegenden Winkel bey A und B kleiner als zween Rechte ſind; ſo iſt ein Dreyeck möglich, oder die

Li-

Linien AC, BD ſtoſſen zuſammen, wenn ſie gehörig verlängert werden.

11. Satz. Aufgabe.

§. 54. Aus drey gegebenen Seiten, wovon je zwo größer ſind, wegen §. 52, ein Dreyeck zu beſchreiben. Fig. 36.

Auflöſung. Die drey Seiten ſeyen AB, AC, BC. Man nehme über der unbeſtimmten Linie MN eine Linie an, die = AB iſt. Aus A beſchreibe man mit AC, aus B mit BC zween Kreiſe oder Bögen, die ſich irgendwo in C ſchneiden werden, und ziehe den Durchſchnittspunkt C mit A und B durch gerade Linien zuſammen.

12. Satz. Aufgabe.

§. 55. An einem gegebenen Punkt A einer gegebenen Linie MN einen Winkel BAC zu machen, der einem gegebenen man gleich iſt, Fig. 37.

Auf-

Aufloͤſung. Man beſchreibe mit einem beliebigen Radius ab einen Bogen bpc, der am und an in b und c ſchneiden wird. Aus A als Mittelpunkt beſchreibe man mit AC = ac einen unbeſtimmten Bogen CD, aus C aber durchſchneide man den Bogen CD durch einen andern, deſſen Radius CB = cb iſt; ſo werden die △△ BAC, bac gleich ſeyn, folglich auch BAC = bac.

§. 56. Anmerkung. Hieraus ſieht man, wie man ein Dreyeck machen koͤnne, wenn der eingeſchloſſene Winkel ſammt den Seiten die ihn einſchließen, gegeben ſind. Naͤmlich, man mache einen Winkel, der dem gegebenen gleich iſt, trage die gegebenen einſchließenden Seiten auf die Schenkel dieſes Winkels, und ziehe die Endpunkte der aufgetragenen Seiten durch eine gerade Linie zuſammen. Waͤre eine Seite ſammt den zween anliegenden Winkeln gegeben, deren Summe aber kleiner ſeyn muß, als zween Rechte; §. 52. ſo mache man auf den Endpunkten einer Linie, die der gegebenen Seite gleich iſt,

zween

zween Winkel, einen dem andern gegenüber, welche den gegebenen gleich ſind; denn die Schenkel dieſer Winkel, wenn ſie gehörig verlängert werden, werden ſich irgendwo ſchneiden, und das Dreyeck formiren.

13. Satz. Lehrſatz.

§. 57. Wenn zwo Linien AB, CD, Fig. 38, von einer dritten EF ſo durchſchnitten werden, daß die zween *innern entgegengeſetzten* Winkel $b + d =$ zween Rechten ſind, ſo wird I. AB mit CD Parallel II. der äußere Winkel $f = d$ ſeinem *inneren entgegengeſetzten* und III. die Wechſelwinkel d und a gleich ſeyn.

Beweis. I. Wenn $b + d = 2R$, ſo können die Linien AB, CD nach der Gegend x hin, nicht zuſammenſtoſſen; weil ſonſt ein Dreyeck entſtünde, worinn die Summe zweyer Winkel zween Rechte wäre, wider §. 46. Weil aber ſowohl $a + b$ als $c + d = 2R$ §. 30; ſo iſt $a + b + c + d$

=

$=4$ R und wegen $b+d=2$ R auch $a+c=2$ R. Daher können die Linien AB, CD auch nach der Gegend y hin nicht zuſammen ſtoſſen, folglich ſind ſie parallel.

II. Angenommen iſt das $b+d=2R$ ſey. Aber auch $b+f=2$ R §. 30; folglich $b+d=b+f$, und wenn man beyderſeits b hinwegnimt $d=f$.

III. Weil vermöge des Satzes $b+d=2$ R und nach §. 30, auch $a+b=2$ R iſt, ſo wird wie in II. $b+d=a+b$, und $d=a$.

§. 58. Zuſatz. Wenn $f=d$ oder der Aeußere ſeinem Inneren entgegengeſetzten gleich iſt, ſo ſind die zween Inneren zweyen Rechten gleich oder $b+d=2$ R. Denn $f+b=2$ R §. 30. Aber $f=d$, wie man annimt; alſo auch $d+b=2$ R wenn ſtatt f das d in $f+b=2$ R geſetzt wird.

§. 59.

§. 59. Zuſatz. Auch wenn die Wechſelwinkel gleich ſind, oder d = a iſt, ſo machen die zween Inneren zween Rechte oder d + b = 2 R. Denn a + b = 2 R §. 30. und d = a, wie man vorausſetzt, alſo auch d + b = 2 R.

§. 60. Zuſatz. Aus jedem der drey Sätze b + d = 2 R oder d = f oder d = a folgen die übrigen zween, und daß die Linien parallel ſind.

§. 61. Zuſatz. Jede Linie EF oder GH ſchneidet die Parallelen AB, CD ſo, daß die Innern miteinander zween Rechten, der Innere und Aeußere entgegengeſetzte, und die Wechſelwinkel gleich ſind, denn geſchehe dieſes bey einer einzigen nicht; ſo würden die Linien nach §. 53 zuſammenſtoſſen, folglich nicht parallel ſeyn.

§. 62. Zuſatz. Weil es nur eine einzige Linie durch den Punkt a Fig. 39 geben kann, von welcher die inneren dca + mac

=

= 2 R ſind, ſo giebt es durch einen Punkt a auch nur eine einzige Parallellinie mit cd.

§. 63. Zuſatz. Wenn man Fig. 40 die Endpunkte A, B und C, D zwoer Linien AB, CD, welche parallel und gleich ſind, mit geraden Linien AC, BD zuſammen zieht, ſo ſind auch AC, BD parallel und gleich. Man ziehe die Diagonal BC, weil AB mit CD parallel und gleich iſt, ſo wird ABC = BCD §. 57 III. AB = CD und CB beyden △△ ABC, CBD gemein, folglich △ ABC = △ CBD und AC = BD seyn. Weil aber in den gleichen △△ ABC, CBD der Winkel ACB = CBD iſt, ſo iſt auch AC mit BD parallel, §. 57.

§. 64. Zuſatz. Die gegenüberſtehenden Seiten eines Parallelograms ſind gleich, Fig. 41. Man ziehe die Diagonal AC. Weil BC mit AD parallel iſt, ſo muß p = q und wegen den parallelen AB und CD auch m = n ſeyn. §. 57. III. Die

Dia-

Diagonal AC iſt beyden △△ ABC, ACD gemein, folglich ſind dieſe Dreyecke gleich, §. 27; und BC = AD, AB = CD.

§. 65. Zuſatz. Alle Perpendikeln zwiſchen Parallelen ſind gleich, Fig. 42. Es ſey ME, und NF auf eine der Parallelen CD ſenkrecht, ſo ſind MEF + NFE = 2 R; folglich ME und NF parallel, §. 57, I, und gleich, §. 64.

§. 66. Zuſatz. Die Diagonal theilt das Parallelogram in zween gleiche Theile.

§. 67. Zuſatz. Die gegenüberſtehenden Winkel in dem Parallelogram ſind gleich.

§. 68. Zuſatz. Ein Parallelogram das einen Rechten hat, hat lauter rechte Winkel, §. 57, I.

§. 69. Zuſatz. Wenn man Fig. 43, durch einen Punkt der Diagonal x mit den Seiten AB, BC des Parallelograms die Paralle-

rallelen HG, EF zieht, ſo entſtehen vier Vierecke. Die zwey EBGX und XFDH, wodurch die Diagonal AC nicht geht, heißen die Komplemente, und ſind einander gleich. Denn die Diagonalen AC, XC, XA theilen jede ihre Parallelograme in zween gleiche Theile. Man ſetze $\triangle$ AEX $=$ $\triangle$ AHX $=$ m. Das $\triangle$ XGC $=$ $\triangle$ XCF $=$ n. Die Komplemente nenne man p und q; ſo iſt, weil AC das Parallelogram ABCD in zween gleiche Theile theilt $m+p+n=m+q+n$ und beyderſeits $m+n$ weggenommen $p=q$.

14. Satz. Aufgabe.

§. 70. Durch einen gegebenen Punkt A Fig. 44, mit einer gegebenen Linie BC eine Parallel zu ziehen.

Aufloͤſung. Man ziehe eine Linie AD von A nach der Linie BC, und mache durch Huͤlfe des 12ten Satzes §. 55, I. entweder den Winkel $n=p$, oder II. $X=a$ oder III.

m

m = q, ſo wird EF parallel mit BC ſeyn. §. 57.

15. Satz. Aufgabe.

§. 71. Wenn zwo Seiten eines Parallelograms ſammt dem eingeſchloſſenen Winkel gegeben ſind, das Parallelogram zu machen.

Auflöſung. Die zwo Seiten ſeyen AB, und AC Fig. 45, der Winkel BAC. Man mache an einer Linie an einen Winkel man, welcher dem gegebenen BAC gleich iſt, §. 55; ferners ab = AB und ad = AC. Aus b beſchreibe man mit ad einen Bogen, und durchſchneide ihn aus d mit einem andern, deſſen Radius = ab iſt, ſo wird, wenn der Durchſchnitt C durch die geraden Linien bc, dc mit b und d zuſammgezogen iſt, abdc das verlangte Parallelogram ſeyn, §. 64.

§. 72. Zuſatz. Wenn BAC ein rechter Winkel iſt; ſo wird das Parallelogram

ein

ein Rechteck, und wenn überdieß noch BA = AC genommen wird, ein Quadrat ſeyn.

§. 73. Anmerkung. Weil bc mit ad parallel iſt, ſo kann man auf dieſe Art auch Parallelen mit einer gegebenen ad durch einen Punkt b ziehen.

16. Satz. Lehrſatz.

§. 74. In jedem Dreyeck ABC, Fig. 46 iſt, wenn man eine Seite AC verlängert, I. der Aeußere BCD den Inneren entgegenſetzten zuſammen gleich, II. die Summe aller drey Winkel des Dreyeckes = 2 R.

Beweis. I. Man ziehe CF mit AB parallel, ſo iſt $q = n$ §. 57. III. $x = m$ §. 57. II. alſo $q + x = BCD = m + n$.

II. Weil $q + x = m + n$, ſo iſt $q + x + p = m + n + p$. Aber $q + x + p = 2R$, §. 30. Alſo auch $m + n + p = 2R$.

§ 75. Zuſatz. Wenn in einem Dreyecke zween Winkel oder ihre Summe ſo groß iſt, als zween Winkel, oder ihre Summe in einem andern, ſo iſt auch der dritte vom erſten Dreyecke, dem dritten vom andern gleich.

§. 76. Zuſatz. Wenn ein Winkel in einem Dreyecke ſo groß iſt, als ein Winkel in einem andern, ſo iſt die Summe der zween übrigen im erſten ſo groß, als die Summe der übrigen im andern.

§. 77. Zuſatz. Wenn ein Winkel im Dreyecke ein Rechter iſt, ſo machen die zween andern zuſammen auch noch einen Rechten.

§. 78. Zuſatz. Iſt das Dreyeck rechtwinklicht und gleichſchenklicht, ſo iſt jeder der zween ſpitzigen $= \frac{1}{2}$ R.

§. 79. Zuſatz. Im gleichſeitigen Dreyecke iſt jeder Winkel $\frac{1}{3}$ von 2 R oder $= \frac{2}{3}$ R. §. 29.

§. 80. Alle Winkel eines Vielecks machen ſo vielmal zween Rechte, als das Vieleck Seiten hat, weniger vier Rechten, Fig. 47. Denn man ziehe von einem Punkt x innerhalb des Vielecks nach allen Scheiteln der Vieleckswinkel gerade Linien, ſo entſtehen ſo viele Dreyecke als die Figur Seiten hat. Die Summe der Winkel aller Dreyecke erhält man alſo, wenn man 2 R mit der Anzahl der Seiten multiplizirt. Nimt man hievon die Winkel um den Punkt x, die zuſammen 4 R machen, §. 33, hinweg, ſo bleiben die Winkel des Vielecks im Reſte. Wenn daher die Anzahl der Seiten n, die Summe der Vieleckswinkel S heißt, ſo iſt $S = 2Rn - 4R = 2R \times n - 2 \times 2R = 2R (n-2)$. Man erhält alſo die Summe der Vieleckswinkel, wenn man von der Anzahl der Seiten zwo Einheiten wegnimt, und mit dem Reſte 2 R multiplizirt.

§. 81. Zuſatz. Im regulären Vielecke, wo alle Vieleckswinkel einander gleich ſind, §. 20, findet man einen, wenn man ihre

Sum-

Summe durch ihre Anzahl, die der Anzahl der Seiten gleich iſt, dividirt. Er iſt alſo

$$=\frac{2R(n-2)}{n}=\frac{2Rn}{n}-\frac{4R}{n}=2R\frac{-4R}{n}.$$

17. Satz. Lehrſatz.

§. 82. Die Parallelograme ABCD, und BEFC über einerley Grundlinie BC und zwiſchen zwo Parallelen AF, BH ſind gleich, Fig. 48.

Beweis. In den △△ BAE, CDF iſt BA=CD. BE=CF. Ferner BC=AD =EF. §. 64. Setzt man ſowohl zu AD als EF die nämliche Linie DE hinzu, ſo hat man AD+DE=AE=DE+EF= DF. Alſo ſind dieſe Dreyecke gleich, §. 36. Nimt man das beyden Dreyecken gemeine Dreyeck DGE von ihnen hinweg, ſo bleiben die Trapezen BADG und CGEF übrig, die alſo einander gleich ſeyn müſſen. Setzt man endlich noch zu dieſen gleichen Trapezen

das Dreyeck BGC hinzu, ſo erhält man beyde Parallelograme BADC und BEFC, die alſo einander gleich ſeyn müſſen.

§. 83. Anmerkung. Wenn E zwiſchen A und D wie Fig. 49, fällt, ſo iſt AB = CD. BE = CF und BC = AD = EF §. 64. Folglich AE = AD — ED = EF — ED = DF. Alſo die △△ BAE, CDF gleich. §. 36. Setzt man zu dieſen beyden Dreyecken das Trapez BECD hinzu, ſo hat man die Parallelograme BADC und BEFC, die alſo einander gleich ſind.

§. 84. Zuſatz. Auch die Dreyecke BAC, BEC über einerley Grundlinie und zwiſchen zwo Parallelen ſind gleich. Denn man ziehe Fig. 48, CD mit AB und CF mit BE parallel, ſo ſind die Parallelograme wovon die △△ BAC, BEC die Hälften ſind §. 66, einander gleich, §. 82.

§. 85. Zuſatz. Das Perpendikel zwiſchen einer Seite, die man als eine Grundlinie anſieht, und der ihr gegenüberſtehenden, heißt die Höhe des Parallelograms. Das Perpendikel von dem Scheitel eines Winkels auf die gegenüberſtehende Seite, heißt die Höhe des Dreyecks. Folglich ſind Parallelograme und Dreyecke, welche einerley Höhe und Grundlinien haben, gleich, §§. 82. 84.

§. 86. Zuſatz. Wenn die Dreyecke BAC, BEC Fig. 50. über einerley Grundlinie BC gleich ſind, ſo wird die Linie AE welche durch die Spitzen A und E geht, mit der Grundlinie BC parallel ſeyn. Denn iſt AE nicht parallel mit BC, ſo giebt es eine andere über oder unter AE: z. B. An. Folglich müßte das △ ABC ſowohl dem △ BEC, wie man annimt, als dem △ BmC, §. 84, gleich ſeyn, wider §. 23. Nro. 3.

18. Satz. Aufgabe.

§. 87. Ein Parallelogram zu machen, das einem gegebenen Dreyecke ABC Fig. 51, gleich iſt, und einen gegebenen Winkel M hat.

Aufloͤſung. Man halbire die Grundlinie des △ ABC in D §. 41, und mache EDC = M §. 55; endlich ziehe man BF mit AC und CF mit DE parallel, ſo wird das Parallelogram DEFC dem △ ABC gleich ſeyn, und den verlangten Winkel M haben.

Beweis. Weil EDC = M, ſo hat das Parallelogram den verlangten Winkel. Man ziehe B,D und E,C zuſammen, ſo iſt △ ABD = △ DBC = △ DEC §. 84; aber DBC = $\frac{1}{2}$ △ ABC = DEC = $\frac{1}{2}$ DEFC §. 66; folglich △ AB C = Parallelogram DEFC.

19. Satz. Lehrſatz.

§. 88. In einem rechtwinklichten Drenecke ABC Fig. 52. iſt das Quadrat der Hypothenuſe oder der Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber ſteht, der Summe der Quadraten über den zwo andern Seiten AB und AC gleich, oder es iſt, wenn der Buchſtabe q das Wort Quadrat ausdrückt, BCq = ACq + ABq.

Beweis. Man beſchreibe über jeder Seite ein Quadrat §. 72, und ziehe AN mit CE parallel, von A und B aber nach E und K die geraden Linien AE, BK. Weil BCE und ACK Rechte ſind, §. 18. ſo iſt ACE = R + BCA = BCK. Ferner BC = CE, AC = CK, als Seiten der nämlichen Quadrate §. 18. Alſo △ BCK = △ ACE, §. 25. Aber △ ACE = △ CME §. 84, = ½ CMNE, §. 66; und eben ſo △ BCK = △ ACK = ½ ACKH; folglich ½ CMNE = ½ ACKH und CMNE = ACKH. Auf eine ähnliche Art, wenn man die Linien

FC,

FC, AD dann DM, FA zieht, findet man BMND = FBAG; alſo CMNE + BMNE = BDEC = ACKH + FBAG, oder welches eines iſt BCq = ACq + ACq.

§. 89. Zuſatz. Man nenne die Hypothenuſe h, die zwo andern Seiten a und b, ſo iſt $h^2 = a^2 + b^2$. Alſo $h^2 - a^2 = b^2$ und $h^2 - b^2 = a^2$ Dadurch kann man aus jeden zwoen Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks die dritte finden.

§. 90. Zuſatz. Der Satz §. 88, iſt auch umgekehrt wahr. Es ſey Fig. 53, $h^2 = a^2 + b^2$; ſo wird ABC = R ſeyn. Man mache BE ſenkrecht auf AB, §. 43; und BD = BC; ſo iſt §. 88. $x^2 = a^2 + b^2$; alſo $h^2 = a^2 + b^2 = x^2$; folglich $h^2 = x^2$; und h = x: Daher muß $\triangle DAB = \triangle ABC$ und ABC = ABD = R ſeyn. §. 36.

§. 91. Zuſatz. Die Seite eines Quadrates, welches mehreren Quadraten zuſammengenommen gleich iſt, findet man auf folgende

de Art. Die Seiten der gegebenen Quadrate ſeyen AB, AC, BD, Fig. 54. Man errichte am perpendikulär über an, §. 43. mache ab = AB, ac = AC und ziehe bc. Man errichte neuerdings bf aus b über bc perpendikulär, mache bd = BD, und ziehe dc; ſo wird dcq = bdq + bcq = bdq + abq + acq, oder weil bd = BD, ab = AB, ac = AC iſt, dcq = BDq + ABq + ACq ſeyn.

§. 92. Zuſatz. Iſt ab = ac Fig. 55, ſo wird bcq = 2 abq ſeyn. Macht man ad = bc, ſo iſt bdq = abq + adq = abq + 2 abq = 3 abq; auf dieſe Art laſſen ſich alſo die Seiten von Quadraten finden, die 2, 3, 4 ꝛc. mal ſo groß ſind, als ein gegebenes Quadrat.

20. Satz. Lehrſatz.

§. 93. Wenn man zween Punkte der Peripherie A und B durch eine gerade Linie AB zuſammenzieht, ſo fällt die Linie innerhalb des Kreiſes Fig. 56.

Beweis. Man nehme in AB einen Punkt D an, welchen man will, und ziehe DC. Weil AC = BC §. 16. ſo iſt BAC = ABC §. 26. aber ADC > ABC = BAC §. 45. alſo AC > CD, §. 51. Daher liegt jeder Punkt zwiſchen A und B näher an C als der Radius beträgt, oder die Linie AB fällt innerhalb des Kreiſes.

§. 94. Zuſatz. Eine gerade Linie ſchneidet den Kreis nur in zween Punkten.

21. Satz. Lehrſatz.

§. 95. I. Eine gerade Linie CE Fig. 57, durch den Mittelpunkt des Kreiſes C und der Corde AB Mittelpunkt E gezogen, ſteht auf der Corde ſenkrecht. II. Ein Perpendikel CE vom Mittelpunkt des Kreiſes C auf die Corde, halbirt ſie. III. Ein Perpendikel EC aus dem Mittelpunkt der Corde E geht durch das Centrum des Kreiſes C.

Beweis. I. Man ziehe die Radien CA, CB, ſo iſt in den △△ ACE, ECB die Seite AC = CB als Radien, AE = EB wie man annimt, und EC beyden Dreyecken gemein; alſo △ AEC = △ ECB §. 36; folglich AEC = CEB, das iſt, CE auf AB ſenkrecht, §. 11.

II. Weil das △ ACB gleichſchenklicht iſt, ſo iſt CAB = CBA. §. 26. Ferner CEA = CEB = R wie man annimt; folglich ACE = BCE, §. 75; und △ ACE = △ ECB, §. 27. Alſo AE = EB.

III. Wenn das Perpendikel Em aus dem Mittelpunkt der Corde E nicht durch das Centrum geht, ſo hänge man das Centrum des Kreiſes C mit E durch eine gerade Linie zuſammen. Nach I. iſt EC auf AB und wie man annimt, auch Em ſenkrecht, wider §. 12.

§. 96. Zuſatz. Eine gerade Linie durch den Scheitel und den Mittelpunkt der Grundlinie eines gleichſchenklichten Dreyecks gezogen, ſteht

auf

auf der Grundlinie ſenkrecht, und eine ſenkrechte gerade Linie von der Spitze eines gleichſchenklichten Dreyecks auf die Grundlinie, halbirt die Grundlinie und den Winkel, der ihr gegenüberſteht.

22. Satz. Aufgabe.

§. 97. Durch drey Punkte A, B, C, Fig. 64, die nicht in's Gerade liegen, einen Kreis zu beſchreiben.

Aufloͤſung. Man ziehe A mit B und B mit C zuſammen, und halbire AB und BC, §. 41; wo ſich die Linien, welche AB, und BC halbiren ſchneiden in p, dort iſt das Centrum des Kreiſes, deſſen Peripherie durch A, B, C geht.

Beweis. AB und BC ſind Corden. Weil aber mp und np auf den Mittelpunkten ihrer Corden ſenkrecht ſtehen, §. 42; ſo gehet jede durch das Centrum des Kreiſes, §. 95. III. Folglich muß der Durchſchnitt p der Mittelpunkt deſſelben ſeyn.

23.

23. Satz. Lehrſatz.

§. 98. Ein Perpendikel BD auf den Endpunkt A des Halbmeſſers CA Fig. 57. x berührt den Kreis in dem einzigen Punkt A.

Beweis. Man ziehe nach jedem andern Punkt B von BD eine gerade Linie, ſo iſt CB > CA, weil CAB = R, §§. 46. 51; folglich liegt jeder andere Punkt B weiter von C als der Radius beträgt, das iſt, außer dem Kreiſe.

§. 99. Zuſatz. Wenn in der Peripherie ein Punkt A gegeben iſt, wo eine Tangente gezogen werden ſoll, darf man nur den Radius CA ziehen, und AB auf CA ſenkrecht machen.

24. Satz. Aufgabe.

§. 100. Aus einem gegebenen Punkt x Fig. 58, welcher außerhalb des Kreiſes pnAm liegt, eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

Auf-

Auflöſung. Man ziehe das Centrum C mit x durch eine gerade Linie zuſammen. In A wo Cx den Kreis ſchneidet, errichte man EF auf AC perdendikulär, und beſchreibe mit Cx einen Kreisbogen, welcher EF in B, D ſchneiden wird. Man ziehe von C nach B und D gerade Linien, und wo dieſe den Kreis ſchneiden, das iſt, nach m und n von x ebenfalls gerade Linien; ſo werden xm und xn Tangenten ſeyn.

Beweis. In den △△ CAD, Cxm iſt ACD = xCm. Ferner AC = Cm. Cx = CD als Radien von ebendenſelben Kreiſen, alſo △ CAD = △ Cxm, §. 25. Weil aber CAD = R durch die Zeichnung, und CAD = Cmx, ſo muß xm eine Tangente ſeyn, § 98. Auf eine ähnliche Art kann dieſes für xn erwieſen werden.

25. Satz. Lehrſatz.

§. 101. Der Winkel am Mittelpunkte BDC, Fig. 59, iſt noch einmal ſo groß als

der

der Winkel BAC am Umfange, wenn beyde gleiche Bögen BC abſchneiden.

Beweis. Man ziehe durch den Scheitel A des Winkels am Umfange einen Durchmeſſer; ſo giebt es drey Fälle.

I. Fall. Fig. 59. Nro. 1. BDC = DCA + DAC. §. 74 Da aber das △ CDA gleichſchenklicht iſt; ſo iſt DCA = DAC; folglich BDC = 2 DAC.

II. Fall. Fig. 59. Nro. 2. BDE = 2 BAD und EDC = 2 EAC, wie im I. Fall. Alſo BDE + EDC = BDC = 2 BAD + 2 EAC = 2 (BAD + EAC) = 2 BAC.

III. Fall. Fig. 59. Nro. 3. EDC = 2 DAC und EDB = 2 DAB, wie im I. Fall. Alſo EDC — EDB = BDC = 2 DAC — 2 DAB = 2 (DAC — DAB) = 2 BAC.

§. 102. Zuſatz. Die Winkel, welche an verſchiedenen Punkten des Umfanges über

einer

einerley Abſchnitt ſtehen, ſind einander gleich, weil jeder die Hälfte des nämlichen Winkels am Mittelpunkte iſt.

§. 103. Zuſatz. Weil die Winkel am Mittelpunkte doppelt ſo groß ſind, als die ihnen zugehörige am Umfange; ſo müſſen jene kleiner, gleich, oder größer, als 2 R ſeyn, wenn dieſe ſpitzige, rechte, oder ſtumpfe ſind. Daher, weil ACE < 2 R, Fig. 60 ſo iſt ABE ſpitzig, weil ACF = 2 R, ſo iſt ABF = R. Und weil ACF + DCF > 2 R, ſo iſt ABD ſtumpf.

§. 104. Zuſatz. Die entgegengeſetzten Winkel eines Vierecks, das im Kreiſe eingeſchrieben iſt, ſind zuſammen = 2 R. Denn ſie ſind Winkel am Umfange, und ihre zugehörigen Winkel am Mittelpunkte machen zuſammen 4 R. So iſt, Fig. 61, für BAD der Winkel am Mittelpunkte BCD. Für BED aber BCA + ACM + DCM oder 4 R — BCD: alſo beyde zuſammen 4 R — BCD + BCD = 4 R und die Hälfte = 2 R.

26.

26. Satz. Aufgabe.

§. 105. Ueber einer gegebenen Linie AB Fig. 62, einen Kreisabſchnitt ADB zu beſchreiben, ſo daß jeder Winkel am Umfange ADB über der Corde AB, einem gegebenen Winkel C gleich iſt.

Aufloſung. Man mache BAF = C. §. 55; und errichte über AF in A ein Perpendikel; §. 43. Ferner mache man CBA = CAB, §. 55; und beſchreibe aus C als Mittelpunkt einen Kreis; ſo wird jeder Winkel am Umfange über AB = C ſeyn.

Beweis. Man ziehe den Diameter AE, ſo iſt ADB = AED, §. 102. Weil aber ABE = R, §. 103, ſo iſt auch AEB + EAB = R, §. 76 Durch die Zeichnung iſt EAB + BAF = R, alſo AEB + EAB = EAB + BAF und BAF = AEB = ADB.

27. Satz. Lehrſatz.

§. 106. I. In einerley oder gleichen Kreiſen ſchneiden gleiche Corden gleiche Bögen ab; und II. wenn die Bögen gleich ſind, ſo ſind es auch die ihnen zugehörigen Corden, Fig. 63.

Beweis. I. Es ſey AB = ED; man ziehe vom Mittelpunkte C nach A, B, D, E die Radien CA, CB, CD, CE; ſo iſt △ ABC = △ DCE, §. 36; und DCE = ACB. Legt man alſo DCE über ACB, ſo decken ſie ſich, §. 23. Nro. 6. Folglich fällt D auf A und E auf B. Weil ferner alle Punkte des Bogens D m E ſo weit vom Mittelpunkte abliegen, als die Punkte des Bogens AB, ſo decken ſich die Grenzpunkte, und was dazwiſchen iſt, das iſt, die ganzen Bögen; ſie ſind alſo einander gleich.

II. Weil alle Punkte beyder Bögen vom Mittelpunkte gleich weit entfernt, und die Bögen gleich ſind, ſo decken ſie ſich; wenn

ſie

ſie übereinander gelegt werden. Daher fällt D auf A, und E auf B, alſo DE auf AB; folglich ſind die Corden gleich, wenn die Bögen gleich ſind.

§. 107. Zuſatz. Wenn die Winkel am Mittelpunkte gleich ſind, ſo ſind es auch die Bögen zwiſchen ihren Schenkeln, und wenn die Bögen zwiſchen den Schenkeln der Winkel am Mittelpunkte gleich ſind; ſo ſind es auch die Winkel.

§. 108. Wenn DCE = ACB, ſo iſt der Ausſchnitt DCE dem Ausſchnitt ABC gleich, weil ſich ihre Winkel und Bögen decken.

§. 109. Zuſatz. So oft der Ausſchnitt im Kreiſe umgeſchlagen werden kann, ſo oft iſt ſein Bogen in der Peripherie, und ſein Winkel in 4 R enthalten, alſo ſind die Verhältniſſe des Ausſchnittes zum Kreis, ſeines Bogens zur Peripherie, und ſeines Winkels zu 4 R einander gleich. Heißen zwey Winkel in einerley Kreis a und b, ihre Bögen A

und B, die Peripherie P, ſo iſt a : 4 R = A : P und b : 4R = B : P. Oder die mittlern verwechſelt a : A = 4R : P, und b : B = 4R : P; alſo a : A = b : B, §. 23. Nro. 1. Oder die Winkel verhalten ſich wie die Bögen.

§. 110. Zuſatz. Man ſetze Fig. 64, die Peripherie AmBA = p, die Peripherie DnED = P. So iſt ACB oder DCA : 4 R = AB : p = DE : P. Daher haben die Bögen verſchiedener Kreiſe, wenn ihre Winkel am Mittelpunkte zwiſchen welchen ſie liegen, gleich ſind, ein gleiches Verhältniß zu ihren Peripherien, oder jeder iſt ein gleich großer Theil ſeiner Pheripherie. Wenn man alſo jede Peripherie in gleichviele Theile eintheilt, ſo kommen auf die Bögen gleicher Winkel, gleich viele Theile ihrer Peripherien.

§. 111. Anmerkung. Weil die Winkel das nämliche Verhältniß als die Bögen haben, die man aus ihren Scheiteln zwiſchen ihren Schenkeln mit gleichen Halbmeſſern beſchreibt, ſo laſſen ſich die Winkel durch dieſe

Bö-

Bögen beſtimmen. Man ſtellt ſich zu dieſem Ende die Periepherie vor, als wenn ſie in 360 gleiche Theile eingetheilt wäre, und nennt jeden ſolchen Theil einen Grad. Jeder Grad wird weiter in 60 kleinere gleiche Theile, die man Minuten nennt, und die Minute in 60 Sekunden ꝛc. eingetheilt. Die Größe des Radius, mit welchem man die Bögen zwiſchen den Schenkeln beſchreibt, iſt völlig gleichgültig; denn ſind die Winkel gleich, ſo haben die Bögen ein gleiches Verhältniß zu ihren Peripherien, §. 110. Man nenne $\frac{1}{360}$ vom größeren Kreiſe m, vom kleinern n, die Anzahl Grade bey dem größern Kreiſe x, bey dem kleineren y. Die Winkel ſeyen gleich: So iſt §. 110. mx : 360 m = ny : 360 n. Oder x : 360 = y : 360. §. 155 Arith. alſo x = y. Das iſt, beyde Bögen haben gleichviele Grade, wenn ſchon jene des größeren Kreiſes größer ſind, als die des kleineren. Man zeigt die Grade, Minuten, Sekunden folgendergeſtalt an. Z. B. 40°. 50′. 30″ heißt 40 Grade, 50 Minuten,

30 Sekunden. Weil 4 R = 360° ſind, §. 33. ſo ſind 2 R = 180° und R = 90°. Man ſagt insgemein der Winkel hat ſo und ſoviel Grade; ſo z. B. heißt es: in jedem Dreyecke machen die drey Winkel zuſammen 180°.

28. Satz. Aufgabe.

§. 112. Durch die Scheitel aller Vieleckswinkel eines regulären Vielecks einen Kreis zu beſchreiben.

Aufloͤſung. Man halbire zween Vieleckswinkel BAE, AED, §. 40. Wo ſich die Linien, welche dieſe Winkel halbiren, ſchneiden, iſt der Mittelpunkt des verlangten Kreiſes.

Beweis. BAE + AED < 4 R; alſo $\frac{BAE}{2} + \frac{AED}{2} < 2R$. Daher ſtoſſen die Linien AX, EX zuſammen, welche die Winkel BAE, AED halbiren, §. 53. BAE = AED. §. 20. Folglich XAE = XEA, und XA = XE, §. 26. Halbirt man den Winkel EDC eben-

ebenfalls, ſo wird aus ähnlichen Gründen XE = DX ꝛc. Folglich ſtehen alle Scheitel der Vieleckswinkel von dem Punkte X gleichweit ab, und man kann aus *X* als Mittelpunkt, mit dem Abſtande deſſelben von den Scheiteln der Vieleckswinkel, den verlangten Kreis beſchreiben.

§. 113. Zuſatz. Alle Dreyecke AXE, XED, DXC ꝛc. ſind gleich §. 36; folglich auch alle Winkel dieſer Dreyecke um den Punkt X. Man nennt jeden den Centralwinkel des regulären Vielecks. Weil ſie miteinander 4R ausmachen, §. 33; ſo iſt einer oder der Centralwinkel $= \frac{4R}{n}$ wenn n die Anzahl der Seiten des Vielecks bedeutet.

§. 114. Zuſatz. Weil $2R - \frac{4R}{n}$ den Vieleckswinkel in regulären Vielecken giebt, §. 81; ſo erhält man den Vieleckswinkel, wenn man den Centralwinkel von 2R oder 180° abzieht.

§. 115.

§. 115. Zuſatz. Im regulären Sechsecke iſt der Centralwinkel axb Fig 66.

$$= \frac{4R}{6} = \frac{360}{6} = 60^\circ$$ §. 113. zieht man ihn von 2 R oder 180° ab, ſo bleibt für die Summe der zween übrigen im Dreyecke axb 180° — 60° = 120°. §. 74; und weil axb wegen ax = xb §. 112. gleichſchenklicht iſt, ſo ſind die Winkel an der Grundlinie ab gleich, und jeder $$= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$ §. 26. alſo alle drey Winkel im △ axb; folglich auch alle drey Seiten gleich, § 29; und xa = xb = ab. Daher iſt die Seite des Sechseckes dem Halbmeſſer des Kreiſes gleich, den man um daſſelbe beſchreiben kann. Und der Radius läßt ſich in der Peripherie genau ſechsmal als Corde herumtragen, Fig. 66.

§. 116. Anmerkung. Die Central- und Vieleckswinkel der regulären Vielecke laſſen ſich nach den §§. 113, und 114, leicht berechnen. Macht man an dem Mittelpunkte

eines

eines Kreiſes einen Winkel ſo groß als der Centralwinkel des verlangten Vielecks iſt, ſo wird ſich die Corde von dem Bogen dieſes Vielecks, ſo vielmal im Kreiſe umſchlagen laſſen, als das verlangte Vieleck Seiten hat. Iſt die Seite ED Fig. 65 des beſtimmten Vielecks gegeben; ſo trage man an ihren beyden Endpunkten E und D den halben Vieleckswinkel XED = XDE auf, in X wo ſich EX und DX ſchneiden, iſt das Centrum des Kreiſes, welcher um das verlangte Vieleck umſchrieben werden kann; §. 112. Man darf alſo nur die Seite ED ſo vielmal in der Peripherie herumtragen, als das Vieleck Seiten hat. Weil hier die Winkel in Graden gegeben ſind, ſo bedient man ſich gemeiniglich zur Auftragung derſelben des gewöhnlichen Transporteurs, wovon ſich aber keine genaue Beſtimmung erwarten läßt. Fig. 67 iſt eine Abbildung deſſelben. Da die koncentriſchen Halbkreiſe des Transporteurs aus ihrem Mittelpunkt in 180 Grade getheilt, und die Anzahl der Grade durch Zahlen auf den-

ſel-

ſelben angemerkt ſind, ſo läßt er ſich folgen-dergeſtalt zur Auftragung der Winkel brauchen. Z. B. man ſoll an der Linie xy an einem gegebenen Punkt einen Winkel von 40° machen. Man lege den Diameter des Transporteurs genau an xy, deſſen Centrum C aber an den Scheitel des Winkels, welcher aufgetragen werden ſoll, und bemerke den Punkt m wo 40° von B gegen M hin auf dem Transporteur angemerkt ſind. Durch den Scheitel des Winkels und den bemerkten Punkt m ziehe man ſodenn eine gerade Linie CQ, ſo wird QCy = 40° ſeyn. Daß man ſich von dergleichen Inſtrumenten nicht viele Genauigkeit verſprechen könne, erhellet daraus allein ſchon, weil ſie einen kleinen Halbmeſſer haben, und nicht wohl weiter als in Grade getheilt werden können.

29. Satz. Lehrſatz.

§. 117. Dreyecke von einerley Höhe, verhalten ſich wie ihre Grundlinien.

Be-

Beweis. Man ſetze eine Linie $x = AD = ad$ Fig. 68; laſſe ſich von A bis C m mal von a bis c aber n mal umſchlagen, ſo iſt $AC = m \times AD$ und $ac = n \times ad = n \times AD$. Da die Linien AD, DE, EF, FC, ad, de, ec alle einander gleich ſind, ſo ſind auch alle kleinen Dreyecke, wie ABD, abd ꝛc. über dieſen Grundlinien gleich, §. 84. Folglich iſt $\triangle ABC = m \times \triangle ABD$ und $\triangle abc = n \times \triangle abd = n \times \triangle ABD$. Alſo hat man

$$ac : AC = n \times AD : m \times AD = n : m.$$

§. 155. Rechenk.

$\triangle abc : \triangle ABC = n \times \triangle ABD : m \times \triangle ABD = n : m$. §. 155. Rechenk. Oder $ac : AC = n : m = \triangle abc : \triangle ABC$, und daraus $ac : AC = \triangle abc : \triangle ABC$.

§. 118. Zuſatz. Der Satz gilt auch von Parallelogramen, weil ſie doppelt ſo groß als Dreyecke ſind, wenn ſie einerley Höhen und Grundlinien mit denſelben haben, §. 84.

§. 119.

§. 119. Zuſatz. Giebt es keine Linie, die beyde Grundlinien genau ausmißt, und es iſt der angenommene Maaßſtab in der einen Grundlinie ac genau m mal, in der andern; AC aber mehr als n mal, aber doch nicht ganz n + 1 mal enthalten; wo m und n ganze Zahlen bedeuten, ſo ſieht man leicht, daß, wenn der Maaßſtab n mal genommen wird, das Produkt der Grundlinie AC noch nicht gleich ſeyn könne; daß aber doch das was fehlt, deſto kleiner ſeyn werde, je kleiner der Maaßſtab ſelbſt iſt. Denkt man ſich ihn unendlich klein, ſo wird der Fehler kleiner als unendlich klein, und verſchwindet. Alſo bleibt der Satz auch in dem Falle wahr, wenn die Grundlinien kein endliches gemeines Maaß haben.

30. Satz. Lehrſatz.

§. 120. I. Wenn man Fig. 69, in einem Dreyecke ABC mit der Grundlinie AC eine Parallel DE zieht, ſo iſt BD : DA = BE : EC. Und II. wenn BD : DA = BE : EC, ſo iſt DE mit AC parallel.

Be-

Beweis. I. Man ziehe AE, CD. Weil die Grundlinien der △△ BED, EEA ins Gerade liegen, und die △△ in einerley Punkt E zuſammen ſtoſſen, ſo haben ſie einerley Höhe; folglich iſt △ BED : △ DEA = BD : DA und aus gleichen Gründen auch △ BED : △ DEC = BE : EC, §. 117. Aber △ DEA = △ DEC, §. 85. Alſo BD : DA = △ DEC : △ DEA = BE : EC und BD : DA = BE : EC.

II. BD : DA = △ BDE : △ DEA und BE : EC = △ BDE : △ DEC, §. 117. Wenn alſo BD : DA = BE : EC; ſo iſt △ BDE : △ DEA = △ BDE : △ DEC. Alſo △ DEA = △ DEC. Folglich DE mit AC parallel. §. 86.

§. 121. Zuſatz. Weil BD : DA = BE : EC, ſo laſſen ſich alle Veränderungen machen, die §. 160 Rechenk. angeführt ſind, z. B. die Mittlern oder Aeußern verwechſeln ꝛc.

§. 122.

§. 122. Zuſatz. Weil BD : DA = BE : EC ſo iſt §. 160 Rechenk. Nro. II. BD + DA : BD = BE + EC : BE oder weil BD + DA = BA und BE + EC = BC iſt; BA : BD = BC : DE; alſo ſind die Theile, in welche die Parallele mit der Grundlinie die Schenkel ſchneidet, ſowohl unter ſich als auch mit den Ganzen proportional.

31. Satz. Lehrſatz.

§. 123. Wenn in zwey Dreyecken ABC, abc Fig. 70 zween Winkel vom erſten, zween Winkeln des andern gleich ſind, oder BAC = bac, BCA = bca; folglich ABC = abc §. 75; ſo ſind die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberſtehen, proportional, oder es iſt AC : ac = AB : ab = BC : bc.

Beweis. Man ſtoſſe das Dreyeck abc ſo an das andere ABC bey C, daß a über C und ac mit AC ins Gerade zu liegen kömmt, und verlängere AB ſowohl, als bc bis ſie irgendwo in D zuſammen ſtoſſen. Denn weil

BAC+BCA < 2 R §. 45; und BCA = bca, ſo iſt auch BAC + bca < 2 R alſo ſtoſſen AB und cb gehörig verlängert zuſammen, §. 53. Wegen BAC = bac iſt AB mit ab, wegen BCA = bca, aber, BC mit bc parallel §. 57 II. Folglich BD bC ein Parallelogram, BD = bC oder ba, und Db = Ba oder BC. In dem △ ADc iſt BC mit Dc parallel. Alſo AC : ac = AB : BD oder ab. Eben ſo, weil auch ab mit AD in dem △ ADc parallel iſt, ſo muß noch AC : ac = Db oder BC : bc ſeyn; §. 120. folglich iſt AB : ab = AC : ac = BC : bc.

§. 124. Zuſatz. Weil AC : ac = AB : ab und AC : ac = BC : bc iſt, ſo wird Rechenk. §. 160. Nro. I. AC : AB = ac : ab und AC : BC = ac : bc.

§. 125. Zuſatz. Wenn man in einem Dreyecke ABC, Fig. 71; mit der Grundlinie AC eine parallel DE zieht, ſo ſind die △△ DBE,

DBE, ABC ähnlich. Denn es iſt BDE = BAC und BED = BCA, §. 57. II.

§. 126. Zuſatz. Wenn man in einem rechtwinklichten Dreyecke ABC, Fig. 72, von dem rechten Winkel B auf die Hypothenuſe AC ein Perpendikel fällt, ſo ſind die △△ ABD, und BDC dem groſſen △ ABC ähnlich. Denn beyde △ ABD und BDC haben bey D einen Rechten, ſo wie das △ ABC bey B, und überdieß noch das △ ABD den Winkel bey A, das △ BDC den Winkel bey C mit dem △ ABC gemein; folglich ſind die beyden kleinen Dreyecke dem groſſen ähnlich §. 123. Alſo wenn man die Seiten der △△ ADB und BDC vergleicht, AD : BD = BD : DC. Folglich iſt BD die mittlere geometriſche Proportionallinie zwiſchen AD und DC. Vergleicht man die Seiten des △ ABD mit denen des △ ABC, ſo erhält man AD : AB = AB : AC, und für die △△ BDC und ABC die Proportion DC : BC = BC : AC. Alſo ABq = AD × AC und BCq = DC × AC; folglich ABq +

BCq

$BCq = AD \times AC + DC \times AC = AC (AD + DC) = AC \times AC = ACq$. Welches der Satz §. 88. iſt.

32. Satz. Lehrſatz.

§. 127. Wenn in zwey Dreyecken ABC, abc Fig. 73 alle Seiten proportional ſind, oder $AC : ac = AB : ab = BC : bc$ iſt; ſo ſind die Winkel, welche gleichnamigen Seiten gegenüberſtehen, gleich.

Beweis. Man mache an ac den Winkel $dac = BAC$ und $dca = BCA$, ſo wird auch $adc = ABC$ ſeyn. §. 75. Alſo $AC : AB = ac : ad$ und $AC : BC = ac : cd$ §§. 123. 124; aber da man annimt daß $AC : ac = AB : ab = BC : bc$ ſey; ſo iſt auch $AC : AB = ac : ab$, und $AC : BC = ac : bc$. §. 124. Dieſes giebt $ac : ad = AC : AB = ac : ab$, alſo $ad = ab$. Ferner, weil $ac : cd = AC : BC = ac : bc$ iſt, und daraus $ac : cd = ac : bc$; ſo muß auch $cd = bc$ ſeyn. Alſo decken ſich die $\Delta\Delta$ abc, adc §. 36; folg-

lich weil △ adc durch die Zeichnung mit △ ABC gleiche Winkel hat, ſo muß auch das △ abc, das dem △ adc gleich iſt, gleiche Winkel mit dem △ ABC haben.

33. Satz. Lehrſatz.

§. 128. Wenn in zwey Dreyecken ABC, abc Fig. 73, ein Winkel vom erſten, einem von dem andern gleich iſt, die einſchließenden Seiten aber proportional ſind, oder BAC = bac und AC : AB = ac : ab iſt, ſo wird auch ABC = abc und BCA = bca ſeyn.

Beweis. Man mache an ac den Winkel dac = BAC und dca = BCA, ſo wird auch ABC = adc ſeyn §. 75. Alſo nach §§. 123. 124 AC : AB = ac : ad aber auch AC : AB = ac : ab wie man annimt, folglich ac : ad = AC : AB = ac : ab, und daraus ac : ad = ac : ab, alſo ad = ab, und die △△ abc, adc einander gleich §. 25. Weil nun das △ dac mit dem △ ABC durch die Zeichnung gleiche Winkel hat,

ſo

ſo muß auch das △ abc, welches dem △ adc gleich iſt, einerley Winkel mit △ ABC haben.

§. 129. Anmerkung. Wenn bey mehreren Dingen alle Merkmaale bis auf ihre Größen gleich ſind, ſo heißen ſie ähnlich. Da ſich bey Dreyecken nichts als Winkel und Seiten, und bey den Seiten nichts als ihre Größe, und Verhältniſſe gegeneinander unterſcheiden laſſen, ſo ſind die Dreyecke ähnlich, wenn ſie gleiche Winkel und proportionale Seiten haben. Aber da aus der Gleichheit der Winkel die Proportionalität der Seiten, und aus der Proportionalität der Seiten die Gleichheit der Winkel folgt, §§. 123. 127; ſo ſind die Dreyecke ähnlich. I. Wenn ihre Winkel gleich §. 123; II. wenn ihre Seiten proportional, §. 127; oder III. ein Winkel in dem einen Dreyeck ſo groß als ein Winkel in dem andern, und ihre einſchließenden Seiten proportional ſind §. 128. Die Sätze §§. 25. 27. 36 von

der Gleichheit und §§. 123. 127. 128 von der Aehnlichkeit der Dreyecke ſind von unendlichem Gebrauche in der Mathematik überhaupt, und man muß ſich dieſelben wohl bekannt machen.

34. Satz. Aufgabe.

§. 130. I. Zu drey gegebenen Linien Fig. 73 * AB, BC, AD die vierte, oder II. zu zwoen AB, BC die dritte geometriſche Proportionallinie zu finden, Fig. 74.

Auflöſung. I. Man mache einen beliebigen Winkel MAN, und trage aus A in B die Linie AB, aus B in C, die BC, aus A in D, die AD. Man ziehe von D nach B die gerade Linie BD, durch C aber eine Parallele mit DB §. 70, ſo wird AB : BC = : AD : DE und DE die vierte geometriſche Proportionale ſeyn §. 120.

II. Trägt man in dem Winkel MAN Fig. 74 AB aus A in B, und BC ſowohl

aus

aus B in C als aus A in D, und zieht DB ſo wird, wenn man EC mit DB parallel macht §. 70, AB : BC = AD oder BC : DE, das iſt, AB : BC = BC : DE ſeyn §. 120.

35. Satz. Aufgabe.

§. 131. Zwiſchen zwoen gegebenen Linien DC, und DA Fig 75. die mittlere geometriſche Proportionallinie zu finden.

Aufloͤſung. Man trage CD in der Linie mn aus C in D, und DA aus D in A. Man halbire AC in E §. 41, und beſchreibe mit AE als Halbmeſſer den Halbkreis ABC. In D errichte man BD perpendikulaͤr auf CA, ſo wird BD die mittlere Proportionale zwiſchen CD und DA ſeyn.

Beweis. Weil ABC = R iſt, §. 103; ſo iſt CD ; DB = DB : DA §. 126.

36. Satz. Aufgabe.

§. 132. Eine Linie AB eben ſo einzutheilen, als eine andere CD z. B. die in E, und F ſchon eingetheilt iſt, Fig. 76.

Aufloͤſung. Man ſetze AB und CD unter einem beliebigen Winkel, BAD zuſammen, ſo daß C auf A zu liegen koͤmmt. Man mache KBA = BAD §. 55; ferner BG = DF und BH = DE. Von den Punkten G, und H ziehe man nach F und E die geraden Linien GF, HE, ſo werden ſie AB in M und N ſchneiden, und in dem verlangten Verhaͤltniſſe eintheilen, oder es wird CE : AN = EF : NM = FD : MB ſeyn.

Beweis. Man mache BK = AD und ziehe die Linien BD, KA. Wegen BAD = KBA iſt BK mit AD parallel, §. 57. II und weil uͤberdieß durch die Zeichnung KH = AE = CE iſt, ſo iſt KHEA ein Parallelogram §. 63. Alſo HE mit KA parallel. Aus gleichen Gruͤnden ſind auch GF,

BD

BD mit AK parallel; alſo AE : AN = EF : MN §. 130, = AF : AM §. 122, = FD : MB §. 130, und daraus AE : AN = EF : MN = FD : MB.

§. 133. Zuſatz. Weil HE, GF, BD parallel ſind, ſo ſind die △△ ANE, AMF, ABD einander ähnlich §. 125. Alſo AE : AD = EN : BD und AF : AD = FM : BD. Daher ſind AE und AF eben ſo groſſe Theile von AD als EN und FM von BD = AK.

§. 134. Zuſatz. Wenn Fig. 77 EA in mehrere gleiche Theile z. B. 10 eingetheilt iſt, ſo wird vermöge des vorhergehenden Zuſatzes AB : AE = 1 : 10 = HB : FE oder GA. Folglich HB = $\frac{1}{10}$ GA; ferner AC : AE = 2 : 10 = KC : FE oder GA, und KC = $\frac{2}{10}$ GA ꝛc. ſeyn. Dadurch kann man alſo von einer Linie GA die in m gleiche Theile eingetheilt werden ſoll, ganz bequem die Gröſſe von 1. 2. 3. . . . m — 1 Theilen

len der ganzen Linie angeben, ohne daß die Eintheilung auf der Linie ſelbſt gemacht werden dürfe.

§. 135. Anmerkung. Wenn die Linie GA klein iſt, ſo daß ſie nicht wohl ſelbſt z. B. in 10 kleinere Theile unmittelbar getheilt werden kann, ſo kann die weitere Eintheilung doch noch durch das Verfahren des vorhergehenden §s bewerkſtelliget werden.

37. Satz. Lehrſatz.

§. 136. Aehnliche Figuren ABCDEF, abcdef Fig. 78. laſſen ſich in ähnliche Dreyecke auflöſen.

Beweis. Es ſey der Winkel FAB = fab. Man ziehe von A und a nach allen Ecken ihrer Figuren gerade Linien, ſo werden lauter ähnliche Dreyecke entſtehen. Denn ABC = abc, und AB : BC = ab : bc §. 21; alſo $\triangle$ ABC $\backsim$ $\triangle$ abc §. 128;

folg-

folglich BCA = bca, ACD = BCD — BCA = bcd — bca = acd, und BC : bc = AC : ac aber auch BC : bc = CD : cd, §. 21, und daraus AC : ac = CD : cd. Folglich auch $\triangle$ ACD $\backsim$ $\triangle$ acd ꝛc. §. 128.

Anwendung
der bisherigen Lehren auf die praktiſche Meßkunſt.

§. 137. Eine Figur in Grund legen, heißt eine mit derjenigen die man ſich auf dem Felde durch gewiſſe Punkte denken kann, ähnliche kleinere auf dem Papiere entwerfen. Iſt der Raum der Figur, welche in Grund gelegt werden ſoll, ein kleiner Theil unſrer Erdfläche; ſo iſt dieſes ein Gegenſtand der Feldmeßkunſt.

§. 138. Wenn man mehrere ſchwere Körper in einer nicht zu groſſen Entfernung voneinander an Fäden aufhängt, ſo werden alle Fäden, ſo viel man wahrnehmen kann, paral-

lel zu ſeyn ſcheinen, ohngeachtet ſie gehö⸗rig verlängert, im Mittelpunkte der Schwere unſerer Erde ſich durchſchneiden. Man heißt die Richtung der ſchweren Körper, nach der ſie zu fallen ſtreben, wenn ſie ſich frey über⸗laſſen ſind, die vertikale, ſenkrechte, oder lothrechte Richtung. Eine Ebene, auf wel⸗che die Richtung der ſchweren Körper ſenk⸗recht iſt, heißt eine Horizontalebene, ſo wie die Linie, auf welche die Richtung der Schwere ſenkrecht ſteht, eine Horizontalli⸗nie. In der Ausübung ſtellt man ſich im⸗mer eine ſolche Horizontalebene vor, und denkt ſich, als wenn von jedem Punkte, der in den Riß kommen ſoll, und außer ihr liegt, ein Perpendikel auf dieſelbe gefällt wäre, um den Ort anzuzeigen, über oder unter welchen er in einer Vertikallinie liegt.

§. 139. Weil man wahrgenommen hat, daß die Gewächſe nach vertikalen Richtungen emporkommen, ſo hat man dafür gehalten, daß auf der krummen Oberfläche eines Ber⸗

ges

ges nicht mehr wachſen könne, als auf deſſen horizontalen Grundfläche. Alſo beſtimmt die Größe der Horizontalfläche allein den Werth der Ländereyen und Grundſtücke. Wollte man aber auch dieſen Satz widerſprechen, ſo ſind wir doch gezwungen uns eine Ebene zu denken, und alle Punkte einer aufzunehmenden Figur auf dieſelbe zu reduziren; denn erſtens, kann man die horizontalen Entfernungen und Lage der verſchiedenen Punkte auf unſerer Oberfläche allein als unveränderlich und unwandelbar anſehen, ſo daß ein auf die Horizontalfläche reduzirter Riß einer Figur nach mehreren Jahrhunderten noch brauchbar ſeyn kann, um die Grenzen, horizontale Lage, und Entfrnungen zu finden, wie ſie ehemals waren; ſo beträchtlich im übrigen die Veränderungen in der Oberfläche der Erde ſelbſt ſeyn mögen, welche die Zeitumſtände, Fluthen, Menſchenhände oder andere Zufälle verurſacht haben mögen. Zweytens, ſind wir nicht wohl im Stande eigentlich und im wahren Verſtande ähnliche Figuren mit

denen

denen auf der Oberfläche unſerer Erde zu entwerfen. Im Gegentheile laſſen ſich die horizontale Lage, Entfernungen der verſchiedenen Punkte auf kleinen Theilen unſerer Erdfläche, und die Größe der von Horizontallinien eingeſchloſſenen Figuren leicht beſtimmen.

§. 140. Eine Linie abſtecken heißt eigentlich, Vertikallinien angeben, an welchen man ſich eine Vertikalebene denken kann, und **Linien meſſen**, die horizontale Entfernung von zwoen Vertikallinien finden. Zum Abſtecken der Linien oder der eingebildeten Vertikalfläche, bedient man ſich der **Meßfahnen** und **Abſteckſtäbe**. Die Abſteckſtäbe ſind gerade cylindriſche Stäbe, 5 bis 6 Fuß lang, einen Zoll dick, beſchuht und mit einem eiſernen Stachel verſehen. Die Meßfahnen ſind ebenfalls gerade cylindriſche Stäbe, von 8 bis 10 Fuß Höhe, und gehöriger Dicke, beſchuht, unten mit einem eiſernen Stachel, oben mit einer Fahne von einer in der Ferne kenntlichen Farbe verſehen, um damit weit

ent-

entfernte Punkte zu bemerken, wo ſonſt der Stab allein ſo leicht nicht entdeckt werden könnte. Zwo Meßfahnen und etwa ſechs Abſteckſtäbe mögen meiſtens zureichen.

38. Satz. Aufgabe.

§. 141. Eine Linie auf dem Felde abzuſtecken, und nach Gefallen zu verlängern Fig. 79.

Auflöſung. I. Man ſtecke in die Endpunkten zwo Meßfahnen oder Abſteckſtäbe, aber vertikal ein, ſo läßt ſich in einer ſenkrechten Ebene, welche die Abſteckſtäbe auf einerley Seite berührt, eine Horizontallinie denken.

II. Braucht man zwiſchen den Endpunkten einige Zwiſchenpunkte, oder will man die Vertikalebene erweitern, ſo laſſe man einen Gehülfen, dem man einen Abſteckſtab mitgiebt, nach der Gegend x hin gehen, mit dem Unterrichte, daß er den Abſteckſtab vor

ſich vertikal halten, und bey einem verabredeten Zeichen ſich links, oder rechts fortbewegen ſoll. Tritt man etwas zurücke hinter dem erſten Stab AB, und ſtreicht mit dem Auge an AB und CD herab, ſo wird man leicht gewahr werden, ob der vom Gehülfen vertikal gehaltene Abſteckſtab in der Vertikalebene ſich befinde, welche AB, und CD berührt, oder nicht, auch ob ſich der Gehülfe rechts oder links dieſer Ebene befinde. Giebt man ihm die verabredeten Zeichen, ſo wird er nach und nach ſich der Vertikalebene näheren, und endlich ſo viel ſich mit dem Auge erkennen läßt, ſie mit ſeinem Stabe berühren. Geſchieht dieſes;

III. So giebt man ihm ein Zeichen, ſeinen Abſteckſtab vertikal einzuſtecken. Dieſes Verfahren kann man ſo oft wiederholen, als man es für nöthig findet, und viele Punkte beſtimmt werden ſollen. Es verſteht ſich, daß wenigſtens immer zwey Abſteckſtäbe erforderlich ſind, um Zwiſchenſtäbe zu ſtecken,

oder

oder beym Erweitern der Vertikalebene wenigſtens die zween letzten; die übrigen kann man ausziehen, und dafür etwa zween Fuß hohe Pfähle einſchlagen laſſen.

§. 142. Kürzere Linien laſſen ſich füglich durch eine an den Endpunkten derſelben angehaltene, und wohl ausgeſpannte Schnure ausſtecken, oder man kann doch eine Linie angeben, die in der Vertikalebene durch die beyden Endpunktte ſich befindet.

§. 143. Wenn man die Abſteckſtäbe ſo ſtecken wollte, wie die vorhergehenden die folgenden zu decken ſcheinen, und zu dem Ende das Aug nahe hinter dem erſten Abſteckſtabe halten wollte, ſo würde man grobe Fehler in der Beſtimmung der Richtung der Vertikalebene begehen können. Denn es ſey in A das Aug Fig. 80. hinter dem erſten Abſteckſtabe BC, ſo ſieht das Aug bey B und C vorbey, ſo daß ihm der ganze Raum des Winkels DAE von dem erſten Stabe

be

bedeckt bleibt; ſteckt man einen anderen Abſteckſtab in dieſem Raum, wo man will, z. B. in D, F ſo wird er von dem erſten bedeckt ſeyn, ohne deßwegen in der verlangten Richtung zu ſeyn. Man ſieht leicht, daß der Winkel DAE deſto größer ſeyn wird, je größer BC, oder je dicker der Abſteckſtab ſelbſt iſt, und je näher das Aug an BC gehalten wird.

§. 144. Wenn die Abſteckſtäbe ſchief ſtehen, ſo befinden ſie ſich nicht in einer Vertikalebene, die man doch abſtecken will, viſirt man alſo mit dem Auge von einem ſenkrechten Stabe nach einem ſchief ſtehenden, beſonders über das obere End deſſelben weg (wie es zumal in bergigten Gegenden oft nicht anders geſchehen kann); ſo erhält man eine ſenkrechte Ebene durch den erſten Stab AB Fig. 79, und den oberſten Punkt H des ſchiefen Stabes HK; und dieſe weicht von derjenigen, die man eigentlich abzuſtecken willens iſt, nämlich ABDC um EAC, und über-

überhaupt deſto mehr ab, je ſchiefer und je näher der ſchiefe Stab HK an AB iſt. EAC ſey eine Horizontalebene durch K. Man fälle von K auf AC das Perpendikel KM. Je größer KM wegen der Schiefe des Stabes wird, und je kleiner AM iſt, deſto größer wird KAM ſeyn müſſen, wie man ſich durch bloße Zeichnungen leicht überzeugen kann. Daher müſſen die Stäbe ſenkrecht, und je näher ſie ſind, deſto genauer ſenkrecht geſteckt werden.

§. 145. Meſſen heißt eigentlich ähnliche Dinge miteinander vergleichen. Alſo Linien meſſen, Linien mit Linien vergleichen. Die Linie, welche man annimt, um andere mit ihr zu vergleichen, oder das Maaß, womit man andere ausmißt, nennt man einen Fuß. Zehen Füße heißen eine Ruthe. Der zehnte Theil des Fuſſes iſt ein Zoll; der zehnte Theil des Zolles eine *Linie*; kleinere Theile können in Brüchen von Linien ausgedrückt werden. Ruthen, Füße, Zolle, und

Linien werden wie Grade, Minuten, Sekunden, Terzien angezeigt. So z. B. heißt 12°. 5′. 6″. 7‴ zwölf Ruthen, fünf Fuß, ſechs Zoll, ſieben Linien.

§. 146. Das zehntheilige Maaß hat die Bequemlichkeit, daß, wenn man die höheren Maaße auf niedrigere oder umgekehrt bringen will, eigentlich keine Rechnung nöthig iſt. So ſind z. B. 12°. 5′. 6″. 7‴ = 12567‴ wo die Ziffer nur, wie ſie ſind, angeſchrieben zu werden brauchen. Denn 12° = 120′ Fuß, die 5 Fuß dazu addirt, giebt 125′ = 1250″ und 1250″ + 6″ = 1256″ = 12560‴ wozu endlich noch 7‴ Linien addirt, 12567‴ heraus kommen. Wären z. B. keine Zolle gegeben, ſo fülle man ihre Stelle mit der 0 aus. So ſind 12° 5′ 7‴ = 12507‴. Will man kleinere Maaße auf höhere bringen, ſo folgen ſich Ziffer für Ziffer von der Rechten gegen die Linke; Linien, Zolle, Füße, Ruthen oder Zolle, Füße, Ruthen ꝛc. aufeinander, je nach dem die niedrigſte Stelle

Li-

Linien, oder Zolle ꝛc. bedeutet. Setzt man die Ruthe zu 12 Fuß, den Fuß zu 12 Zoll, den Zoll zu 12 Linien, ſo müßte man, um höhere Maaße auf niedrigere zu bringen mit 12 multipliziren, und wenn niedrige auf höhere gebracht werden ſollten, durch 12 dividiren, welches eine Rechnung erfordert.

§. 147. Wenn der Fuß einerley iſt, und der Dezimalzoll deſſelben, oder die Zoll, wovon 10 einen Fuß machen, x, der Duodezimalzoll oder der, wovon 12 auf den Fuß gehen, y heißt, ſo iſt $10x = 12y$. Alſo $x = \frac{12}{10}y$ und $y = \frac{10}{12}x$. Es frägt ſich, wie viel Duodezimalzolle machen 6 Dezimalzolle? Weil $1x = \frac{12}{10}y$, ſo ſind $6 \times 1x = 6x = \frac{6 \times 12}{10}y = 7{,}2\,y$. Dadurch kann man das zehntheilige Maaß leicht in das zwölftheilige oder umgekehrt verwandeln.

§. 148. Da an verſchiedenen Orten verſchiedene Fußmaaße gebräuchlich ſind, ſo muß man ſie ineinander zu verwandeln wiſſen. Die

Verhältniſſe von Fußmaaßen findet man in verſchiedenen Büchern angegeben. Wenn ſich z. B. der Baieriſche Fuß zum Rheiniſchen wie 12938 : 13913 verhält, ſo frägt ſich, wie viel Baieriſche machen 10 Rheiniſche? 12938 : 13913 = 1 Baier. 1 Rhein. Alſo 1 Rhein. = $\frac{13913}{12938}$ Baier. folglich 10×1 Rhein. = 10 Rhein. = $\frac{10 \times 13913}{12938}$ Baier. = $\frac{139130}{12938}$ Baieriſche = 10,753 oder 10′ 7″ 5‴,3. Wenn aber die Verhältniſſe von verſchiedenen Fußmaaßen nicht unmittelbar ſondern durch mehrere Zwiſchenverhältniſſe gegeben ſind; ſo kann man ſich der Kettenregel bedienen, um zu finden, wie viele eine gegebene Menge genannter Füße, in einem anderen Fußmaaße betragen.

§. 149. Bey dem Meſſen einer Linie ſelbſt hat man Maaßſtäbe nöthig. Z. B. vierkantige prißmatiſche Stäbe von 5′ bis 6′ Länge 1″ Breite, und etwa $\frac{1}{2}$″ Dicke, von wohl ausgetrockneetem Holz, das ſich nicht wirft. Man trägt den landesüblichen Fuß

auf

auf denſelben, und theilt die Füße auch noch in Zolle ꝛc. ein. Sie dienen kleine Linien zu meſſen. Größere Maaßſtäbe von 10 bis 12 Fuß können gebraucht werden, wann man über Anhöhen horizontal wegmeſſen ſoll. Größere Linien, wenn die Gegend ſo ziemlich eben iſt, pflegt man gemeiniglich mit der Meßkette, wenn nicht eine beſondere Genauigkeit erforderlich iſt, auszumeſſen, weil damit die Arbeit als mit einem längeren Maaße geſchwinder von ſtatten geht.

§. 150. Die gewöhnlicheren Ketten beſtehen aus eiſernen Stäben, die zwar nicht zu ſchwach, aber doch auch der Schwere wegen nicht zu ſtark, etwa von der Dicke eines Federkiels ſeyn mögen. Ihre umgebogenen Enden faſſen einen Ring, der von Eiſen oder geſchlagenem Meßing ſeyn kann. Die Mittelpunkte der Ringe müſſen genau einen Fuß voneinander abſtehen. Die Ruthen können durch größere Ringe angedeutet werden. Man kann auch den Ringen meßingene Plättchen

mit

mit darauf angebrachten Zahlen anhängen, welche die Anzahl der Füße von einem Ende der Kette bis zum andern, zu Ende jeder Ruthe anzeigen. Denn wenn bey dem letzten Umſchlag die Kette über den Endpunkt der Linie, welche gemeſſen wird, hinausreicht, ſo erſieht man auf dieſe Art ohne vieles Zehlen von Kettengliedern, um wie viele Fuße die Kette das letzte Stück der Linie, die gemeſſen wird, übertrift. Stimmt der Endpunkt der zu meſſendenden Linie nicht genau mit dem Endpunkte eines Kettenfuſſes überein, ſo dient der §. 149. beſchriebene kleinere Maaßſtab, die Zolle zu beſtimmen, die außer dem bloß dem Augenmaaße nach geſchätzt werden müßten. Die Länge der Kette iſt gemeiniglich von 50 Fuſſen, obſchon einige auch zuweilen 100 Fuſſe haben. Die Ringe an den beyden Enden der Kette ſind etwas größer, als die übrigen, etwa von 1½ Zoll im Durchmeſſer, um die Tragſtäbe bequem durchſtecken zu können. Die Tragſtäbe ſind ohngefähr 4 Fuß hohe cylindriſche Stäbe, ſo dick, daß

ſie

ſie durch die Ringe am Ende der Kette ge-
hen. Unten ſind ſie beſchuhet, und haben einen Stachel. Wenn der Stachel ſich in der Mitte des Stabes befindet, ſo iſt der Anfang der Kette im Mittelpunkte des Ringes, wodurch der Tragſtab geſteckt wird. Fig. 81 ſtellt das End einer Kette mit dem Ring, wodurch der Tragſtab geht, nebſt einem Kettengliede vor. Fig. 82 einen beſchuhten Tragſtab, der ſeinen Stachel in der Mitte hat. Ueberdieß braucht man noch Zeichenſtäbe, das iſt, kleinere Stäbe etwa von 8″ Länge und $\frac{1}{2}''$ Breite und Dicke, um gewiſſe Punkte durch ſie zu bemerken.

§. 151. Fig. 83 ſtellt die bekannte Setzwaage vor. Sie dient Linien horizontal zu machen. Wenn man einem Winkelhacken Fig. 84, bey dem ABC = R = 90° iſt, (worüber man ſich leicht an einer nach §. 43 ſo genau als möglich, gezogenen Perpendikulärlinie verſichern kann), an ac Fig. 83 anlegt; ſo daß BC durch den Punkt b geht,

ſo

ſo kann man den Punkt n beſtimmen, wo der aus b herabhangende Senkel einſchlagen muß, wenn ac horizontal iſt, §. 138. Setzt man die Setzwaage z. B. auf eine Latte Fig. 85, ſo wird dieſelbe, ſobald der Senkel bl in n einſchlägt, horizontal ſeyn, weil ac mit MN einerley iſt.

§. 152. Bey der wirklichen Meſſung hat man Gehülfen nöthig, um Werkzeuge zu tragen, Linien abzuſtecken, Ketten zu ziehen ꝛc. Der Feldmeſſer ſelbſt hat ein Manual und Beſteck nöthig.

39. Satz. Aufgabe.

§. 153. Eine gerade Linie mit der Kette auszumeſſen, wenn die Gegend ziemlich eben iſt.

Aufloͤſung. I. Entweder muß man von einem Endpunkte der Linie bis zum andern deutlich ſehen koͤnnen, oder die Linie, welche

ge-

gemeſſen werden ſoll, muß durch mehrere Zwiſchenſtäbe §. 141 ausgeſteckt ſeyn.

II. Zwey Kettenzieher nehmen die Meßkette, legen ihre Glieder wohl auseinander, und ſtecken an beyden Ringen am Ende die Tragſtäbe durch, der vorausgehende Kettenzieher aber verſieht ſich mit einer hinlänglichen Anzahl von Zeichenſtäben. Man nenne den vorausgehenden Kettenzieher A, den nachfolgenden B.

III. Während dem A vorwärts in der Linie geht, zieht B die Meßfahne oder den Abſteckſtab, der am Anfang der zu meſſenden Linie AX Fig. 79 ſteckt, aus, und ſetzt in den nämlichen Ort den Stachel ſeines Tragſtabs ein. Iſt die Kette beynahe ausgeſtreckt, ſo geht B etwas zurück, und richtet hinter dem Anfangspunkte oder Linie A, der ſeitwärts der Linie ſeinen Tragſtab frey und ſenkrecht vor ſich hält, in die Vertikalebene ein. §. 141.

IV.

IV. A ſpannt ſodann über ſeinen durch den Tragſtab bemerkten Punkt auf dem Felde die Kette an, und ſchlenkert ſie, wenn ſelbe etwa durch die Ungleichheiten des Bodens aufgehalten würde. Iſt man durch kleines Buſchwerk hieran gehindert, ſo biegt man es um, oder haut es weg. Kommen kleine Hügel vor, ſo hebt man die Kette an den Tragſtäben, die ſenkrecht gehalten werden müſſen, in die Höhe, bis die Kette dem Augenmaaße nach horizontal darüber hinſtreicht. Ueberhaupt müſſen die Tragſtäbe allzeit ſenkrecht gehalten, und die Kette wohl geſpannt und dem Augenmaaße nach horizontal gemacht werden. Iſt dieſes geſchehen, ſo

V. Steckt B die Meßfahne wieder ſenkrecht an ſeinen Ort, A aber einen Zeichenſtab in a, wo ſein Tragſtab geſtanden, und beyde gehen weiter vorwärts in der Linie X zu bis B in a anlangt, wo der von A zurückgelaſſene Zeichenſtab ſich befindet. Dann

VI. Zieht B den Zeichenſtab aus, und ſteckt ihn wohl verwahrlich in eine Taſche oder Futteral, ſetzt dafür ſeinen Tragſtab in das Loch, wo der Zeichenſtab geſtanden, und richtet, wie Nro. III. A in die Vertikalebene ein. A macht alles wie zuvor in a, und ſetzt zuletzt in b einen neuen Zeichenſtab. Und ſo wird fortgefahren bis man am Ende iſt.

VII. Geſchieht es zuletzt, daß die Kette bey dem letzten Umſchlag über das End der Linie hinausgeht, ſo ſteckt B ſeinen Tragſtab etwas feſt in die Erde; A ſpannt die Kette mäßig an, und B geht vorwärts bis an das End der Linie, zehlet die Ruthen, Fuſſe, und ſchäzt die Zolle, wenn der Endpunkt der Linie nicht genau auf das End eines Kettenfuſſes treffen ſollte, oder er mißt die Zolle mit dem kleinen Maaßſtaabe §. 149.

VIII. Endlich zehlt B die Zeichenſtäbe, ſo wird ihre Anzahl die Anzahl der Umſchläge geben,

ben, wozu man noch die zuletzt gefundene Fuß und Zolle addirt.

§. 154. In weichem Erdreiche oder Sande hat der hintere Kettenzieher oder B wohl Acht zu geben, daß er den Stachel ſeines Tragſtabes genau in das Loch, wo der Zeichenſtab ſteckt, einſetze, und darinn erhalte, weil er wegen den wenigen Widerhalt der Erde von dem vordern Kettenzieher gar leicht fortgeriſſen werden kann, wenn die Kette geſpannt und geſchlenkert wird.

§. 155. Es geſchieht ſehr oft, daß ſich einige Ringe, während dem man mißt, von der Kette überſchlagen; weil die Kette dadurch kürzer wird, ſo muß man hierüber öfter nachſehen, und die Ringe wieder zu recht machen. Wenn ſich während dem Gebrauche einige Glieder krumm biegen, ſo muß man ihnen, weil auch dadurch die Kette verkürzt wird, ihre gerade Richtung wieder geben, und deßwegen öfter nachſehen: Weil

ſich

ſich ferner die Kettenglieder bey vielem und öfterm Gebrauche ausſchleifen, ſo daß dadurch die Kette um etwas länger werden kann, ſo muß die Kette vor der Meſſung allzeit geprüft werden. Man kann zu dieſem Ende mit Maaßſtäben §. 149, worauf der landesübliche Fuß genau aufgetragen iſt, auf einer Ebene eine Linie von 2, 3, 4 oder mehrmal ſo viel Füßen meſſen, als die Kette lang iſt, aber ſo genau als möglich (wie dieſes geſchieht, ſoll in der Folge gezeigt werden), und ſodann ſehen, wie oft die Kette in dieſer Länge umgeſchlagen werden kann, oder wie viele Kettenfüße auf die Linie gehen. Findet man z. B. daß auf 200 wahre Fuße 199 Kettenfuße gehen, ſo ſind 200 wahre Fuße = 199 Kettenfußen, und 50 Kettenfuße = 50,25 wahre Fuße. Will man ſehen, ob die Glieder unter ſich gleich ſind, ſo nehme man eine Latte z. B. von 3 bis 4 Fußen, und vergleiche die Glieder 1 bis 4, 2 bis 5, 3 bis 6 ꝛc. ſo wird ſich's zeigen, ob und wo ein Fehler ſtecke.

§. 156.

§. 156. Die Kette muß immer ſo viel möglich gleich geſpannt und ſo gehalten werden, daß die Linien durch ihre Endpunkte ſo viel ſich's durch das Augenmaaß erkennen läßt, horizontal iſt, auch muß man genau an die aufgeſteckte Vertikalfläche anlegen, und die Tragſtäbe ſenkrecht halten. Man nimt jeden Umſchlag von gleicher Größe an, das bey merklich ungleichen Spannungen nicht wahr ſeyn kann. Fig. 86 ſey AB horizontal, AC, BD ſollen die Tragſtäbe vorſtellen, mbn die Kette. Sind AC, BD vertikal, und mn horizontal, ſo iſt AmnB ein Rechteck §§. 64. 68. Alſo AB = mn: würden beyde Kettenträger ihre Stäbe gleich ſchief anhalten, z. B. wie Ac Bd zeigt, ſo würde zwar auch MN = AB ſeyn, aber weil es nicht wahrſcheinlich iſt, daß beyde gleichſchief halten ſollten, ſo wird die Linie durch die Endpunkte der Kette weder horizontal, noch von einerley Größe mit einer Horizontallinie zwiſchen beyden Punkten ſeyn, wo die Tragſtäbe eingeſteckt ſind. Weicht man von der

Ver-

Vertikalebene durch AE ab, Fig. 87; und mißt von A nach a, von a nach b, von b nach c ꝛc. ſo ſieht man leicht ein, daß die Summe der Linien Aa + ab + bc + cd + dE > AE ſeyn muß §. 52. Wenn ſchon dieſe Fehler eben ſo beträchtlich bey einzelnen Umſchlägen nicht ſind, ſo kann doch ihre Summe bey mehreren etwas namhaftes betragen, daß ſich durch eine gehörige Aufmerkſamkeit hätte vermeiden laſſen. Um nicht ſo leicht von der Vertikalfläche während dem Meſſen mit der Kette abzuweichen, ſo wollen einige, man ſoll nach dem die Linie gehörig ausgeſteckt iſt, an den Abſteckſtäben eine Schnur z. B. von ohngefähr 300 Fuß länge ausſpannen, und an derſelben hermeſſen. Man erſpart dadurch zugleich dem hintern Kettenzieher die Einrichtung des vordern in die Vertikalebene.

§. 157. Weil die Kette auch mit allen angewandten Kräften nicht genau in's Gerade ausgeſpannt werden kann, ſo daß ſie

ſich

ſich nicht um etwas in der Mitte bey b Fig. 86 ſenken ſollte, ſo fragt ſich, ob man ohne einem beträchtlichen Fehler mbn = mn ſetzen könne? Um ſich einigermaſſen hievon einen Begriff zu machen, ſo denke man ſich in m und n Tangenten, die ſich in y durchſchneiden werden. Man nehme an, daß xy = 1 Fuß ſey, welches bey einer Kette von 50 Fuß Länge, wenn ſie wohl geſpannt iſt, nicht geſchehen wird. Es ſey mn = 50′. Alſo mx = 25, und mxq + xyq = myq. §. 88 oder in Zahlen $25^2 + 1^2 = 626$ = myq; folglich $\sqrt{626} = 25{,}019$ = my. Weil nun my + yn = 2 my > mbn, ſo beträgt der Unterſchied zwiſchen mbn und mn weniger als 0,019 eines Fußes, welches in der Ausübung für unerheblich gehalten werden kann.

40. Satz. Aufgabe.

§. 158. Eine Linie mit den §. 149 beſchriebenen Maaßſtäben auszumeſſen.

Auf.

Auflöſung. I. Nachdem die Linie gehörig ausgeſteckt iſt, §. 141, ſo ſchlage man an einer Schnur, die an den Abſteckſtäben angezogen wird, viereckigte Pfähle ſenkrecht ein, und befeſtige etwa 20 Fuß lange Latten vermöge einer Setzwaage horizontal an denſelben, ſo kann man über dieſen Latten als einer Brücke mit den Maaßſtäben folgendergeſtalt daher meſſen.

II. Man lege Fig. 88 die eine Meßlatte, deren man wenigſtens zwo, die einander gleich ſind, haben muß, über die Brücke ſo, daß ein Senkel von dem einen Ende a derſelben herabgelaſſen, genau über den Anfangspunkt A der Linie, die gemeſſen werden ſoll, ſich befinde, und ſtoſſe in dieſer Lage die zweyte Meßlatte bd an die erſte über der Brücke an.

III. Man nehme die erſte Latte ab weg, und bringe ſie vorwärts, um ſie während dem bd unbeweglich erhalten wird, über der

Brücke an die zwote anzulegen. Auf dieſe Art fahre man fort, bis man am Ende der Linie iſt, die gemeſſen werden ſoll, aber

IV. Man zehle auf was immer für eine Art die Anzahl der Lattennmſchläge genau, meſſe zuletzt noch das Stück der Linie, welches keine volle Latte mehr beträgt, und addire es zu dem, was alle Umſchläge miteinander betragen.

§. 159. Man ſieht, daß die vorhergehende Latte während dem die folgende angeſtoſſen wird, unbeweglich erhalten werden muß. Man kann zu dieſer Abſicht jedes End der vorhergehenden Latten, wo ſie auf der Brücke aufliegen, mit einem Zeichen z. B. mit einem Strich von Bleyſtift bemerken. Damit bey der Zehlung der Umſchläge keine Irrung geſchehe, ſo können entweder ihrer zween die Umſchläge jeder für ſich beſonders in einer Schreibtafel aufſchreiben, oder auch bey jedem Lattenumſchlage gewiſſe

Zei-

Zeichen z. B. einen Rechenpfenning aus der rechten Taſche in die linke ſchieben. Um von der ganzen Arbeit und Anzahl der Unſchläge deſto ſicherer zu ſeyn, kann man die Linie nochmal rückwärts meſſen.

§. 160. Iſt die Linie lang, ſo würde es ſehr koſtbar ſeyn, wenn man die Brücke durchaus ſchlagen wollte. Man kann daher die hintern Pfähle und Latten an derſelben wegnehmen, vorwärts bringen, und mit ihnen die Brücke fortſetzen. Auch wird man wohl thun, wenn man von 100 zu 100 Lattenumſchlägen Merkmale zurück läßt, um die Meſſung rückwärts damit zu vergleichen, und die Uebereinſtimmung oder Fehler deſto leichter bemerken zu können. Daß dieſe Art Linien mittels der Maaßſtäbe zu meſſen genauer ſey, als die mit der Kette, braucht wohl keine Erinnerung.

§. 161. Aus dem was bisher von der Meſſung gerader Linien iſt geſagt worden,

läßt ſich leicht beurtheilen, was für eine Genauigkeit man ſich verſprechen könne, wenn man Meßſtangen oder Latten bloß cirkelförmig umwendet, wo man alſo bey jeder Umwendung um ab, das iſt, um die Dicke der Stange oder Latte zu wenig mißt. Fig. 89. Noch beträchtlicher werden die Fehler, wenn man den Maaßſtab Aa in der Mitte bey C faßt, Fig. 90, ihn ſodann in der Hand um C dreht, bis er bey D die Erde erreicht. Denn dadurch würde man annehmen, daß $AC + CD = AD$ ſey, wider §. 52.

§. 162. Soll an einen ſteilen Abhang gemeſſen werden, ſo kann die Kette nicht wohl gebraucht werden, weil man ſie an dem einen Ende nicht ſo viel erhöhen kann, als es nöthig iſt, ſie ſo viel als möglich horizontal zu machen. Man muß ſich daher der Maaßſtäbe bedienen. Ich ſetze voraus, daß beyde Meßlatten MN, und AC Fig. 91 in Fuße, Zolle, Linien getheilt ſind. Diejenige, welche vertikal geſtellt wird, hat in der Mit-

te unten einen Stachel, und ihre Abtheilungen auf der Mittellinie AC. Legt man die Latte MN I. mit ihrem Ende M an den Anfangspunkt der zu meſſenden Linie, und macht ſie in der Vertikalebene derſelben vermöge einer Setzwaage horizontal; ſo kann man, wenn die andere AC durch Hülfe eines Senkels lothrecht in L daran gehalten wird ML = yc §§. 64, 68; auf MN finden, und in Fußen, Zollen, Linien, angeben.

II. Hält man MN ſodann an C, wo man einen Zeichenſtab geſteckt haben kann; ſo läßt ſich dieſes Verfahren ſo oft wiederholen, bis man den ganzen Abhang herunter gekommen iſt.

III. Addirt man alle einzelnen auf MN bemerkten Horizontaldiſtanzen zuſammen; ſo erhält man den ganzen Horizontalabſtand, der von dem Punkt, wo man angefangen hat, bis zu demjenigen hin iſt, wo man aufgehört hat, ſo daß man nur die Fuße, Zolle,

Li-

Linien, die man jederzeit auf der Latte MN bemerkt hat, zuſammen addiren darf.

§. 163. Daß man hier den Maaßſtab MN genau in die Vertikalebene einrichten, MN ſo viel möglich allzeit horizontal machen, gehörig anlegen, und den Punkt L genau bemerken müſſe, erhellet daraus, weil der Maaßſtab klein iſt, und deßwegen bey einem langen Abhange viele Umſchläge geſchehen müſſen; folglich die Summe aller Fehler ziemlich beträchtlich werden kann.

§. 164. Man ſieht, daß man bey dieſer Art von Meſſung zugleich auf dem Waaßſtabe AC die jedesmaligen Höhen mit anmerken könne. Denn LC giebt die Erhöhung des Punktes M über C Fig. 91. Wenn man die Vertiefung eines Punktes unter dem andern als poſitiv anſieht, ſo muß man die Erhöhung anderer als negativ betrachten, §. 79. Arithm. Wenn daher Fig. 92 QGP den Durchſchnitt einer Anhöhe, QP die Horizon-

rizontallinie durch P vorſtellt, ſo wird der Punkt P um AQ tiefer als A liegen. Aber AQ = PR + ON + ML + KH — FE — DC — AB.

§. 165. Da man eigentlich allzeit den Horizontalabſtand zwoer Vertikallinien durch zween gegebene Punkte ſucht, ſo kann man ſich leicht vorſtellen, was diejenigen erhalten, die mit ihren Ketten über die Anhöhen, und Abhänge ſchief wegmeſſen.

§. 166. Wenn man die Figuren in Grund legt, das iſt, ähnliche kleinere auf dem Papier entwirft, und derſelben Flächeninhalt berechnen, oder Eintheilungen machen ſoll ꝛc; ſo hat man Werkzeuge nöthig, Punkte auf dem Papier zu machen, Linien zu ziehen, ſie auf dem Papier aufzutragen, zu meſſen, zu theilen ꝛc. Weil bey den Figuren, die in Grund gelegt ſind, kleine Linien ungleich größere auf dem Felde vorſtellen, ſo wird man leicht gewahr, daß man bey dergleichen Arbeiten mit aller möglichen

Ge-

Genauigkeit verfahren müſſe. Die nöthigſten Werkzeuge ſind, erſtens, einige Handzirkel mit und ohne Einſätze. Z. B. mit dem Einſatze zu einem Bleyſtift, und einem andren zur Reißfeder. Die Spitzen der Handzirkel müſſen ſcharf und von gehärteten Stahl ſeyn. Legt man die Schenkel zuſammen, ſo müſſen ſie genau in eine Spitze, und ſo zu ſagen in einen Punkt zuſammen laufen. Das Gewind im Kopfe, in welchem ſich die Schenkel bey gutgemachten Handzirkeln herumbewegen laſſen, muß angezogen werden können, um die Schenkel deſto beſſer in der Eröffnung die man ihnen einmal gegeben hat, zu erhalten. Zweytens, hat man Reißfedern nöthig. Sind ſie nicht gut, welches man durch eine Probe erkennen kann, wenn ſich keine reine, und feine Linien damit ziehen laſſen, ſo muß man ihnen mit Feilen und Schleifen ſo lange zu Hülfe kommen, bis ſie das leiſten, was man von ihnen erwartet. Drittens, die ſogenannten Lineale, die man, um gerade Linien zu ziehen, nöthig hat, verfertigt

tigt man aus gut ausgetrocknetem Holze, das ſich nicht wirft, z. B. Linden, Birnbaum, Ebenholz ꝛc. Ihre Schärfen müſſen genau in einer geraden Linie liegen, wenn ſie gut ſeyn ſollen. Herr Profeſſor Meyer räth an, auf einer Glastafel Schmergel, oder Uhrſand zu ſtreuen, dieſelbe mit Waſſer zu benetzen, und mit der Schärfe der Lineale ſodann darüber hin und her zu fahren, um ſie gehörig abzuſchleifen. Werden mehrere Lineale auf einmal geſchliſſen; ſo geht die Arbeit noch beſſer von ſtatten, weil man ſie leichter ohne Wanken in der gehörigen Lage erhält. Nach dem Abſchleifen, werden ſie getrocknet, von dem anhangenden Sand gereiniget, und mit einem Stückchen Tuch an ihrer Schärfe ſo lang gerieben, bis ſie einen Glanz bekommen. Wenn die Schärfen zweyer auf dieſe Art bereiteten Lineals aneinander gefügt werden, ſo decken ſie ſich, und laſſen, gegen das Licht gehalten, nicht den geringſten Raum zwiſchen ſich. Man prüft ſonſt die Lineale, indem man an ihrer Schärfe

MO Fig. 93 eine Linie rns zieht, das Lineal ſodann um MO als eine Achſe dreht, und an demſelben nochmal eine Linie rms zieht, die mit der vorigen zuſammen fallen muß, wenn das Lineal gut ſeyn ſoll. Viertens, hat man hölzerne rechtwinklichte Dreyecke nöthig. Man bedient ſich ihrer theils wie an den Linealen, kleine gerade Linien, theils Perpendikel und Parallelen zu ziehen. Den rechten Winkel CBA Fig. 94 kann man prüfen, indem man auf einem wohl ausgeſpannten Papier eine Linie genau auf die andere ſenkrecht ſetzt §. 43, und das Dreyeck darein legt, um zu ſehen, ob es genau in denſelben hinein paßt. Oder man legt es Fig. 95 an eine zarte gerade Linie MN mit AB an, und zieht längſt BC eine Linie, dann wendet man es um BC als eine Achſe, ſo daß der Schenkel AB auf die andere Seite, AB aber wieder genau an MN zu liegen komme, und zieht abermal aus B eine gerade Linie an BC; treffen beyde Linien zuſammen, ſo iſt der Winkel des hölzernen

Drey=

Dreyecks bey B ein rechter, wo nicht, wie Fig. 95, ſo muß man ihm durch Abſchaben, Abfeilen, Abſchleifen ſo lange helfen, bis dieſes erfolgt. Bey dergleichen Dreyecken kann die Seite BC etwa 12, und AB 4 bis 6 Zoll lang ſeyn. Legt man BA gehörig an MN Fig. 96, und B an dem Punkt, wo eine perperdikulär errichtet werden ſoll, und zieht an BC eine Linie, ſo wird ſie auf MN ſenkrecht ſeyn. Hat man eine Linie AB Fig. 97, und es ſoll durch X eine damit parallel gezogen werden, ſo legt man die Hypothenuſe des △ KHL an AB, an die Seite HL aber ein Lineal, drückt das Lineal feſt, um es in dieſer Lage zu erhalten, und ſchiebt das △ KHL ſo weit hinauf, bis die Hypothenuſe derſelben durch X geht, ſo wird die Linie, die man durch X an der Hypothenuſe des Dreyecks ziehen kann, mit AB parallel ſeyn, weil xhl = KHL §. 57. II.

§. 167. Weil die Figuren, die man auf dem Papier mit denen die auf dem Felde

ſind

ſind, ähnlich macht, kleiner ſind, ſo muß bey ihnen ein kleinerer Fuß und Maaßſtab zum Grunde liegen. Man nennt die Maaßſtäbe der in Grund gelegten Figuren verjüngte Maaßſtäbe. Ihre Verfertigung geſchieht auf folgende Art.

Man nimt eine kleine Linie ab Fig. 98 an, und läßt ſie einen Fuß oft auch wohl eine Ruthe gelten, trägt ſie von a bis c zehnmal nacheinander auf, und ſchreibt die Zahlen 1, 2, 3 ꝛc. bis 10 dazu, wie es die Figur zeigt. Das Ganze ac = 10 ab trägt man dann von a nach d, von d nach e ꝛc. ſo oft auf, als man es für nöthig erachtet, und ſchreibt bey d die Zahl 10, bey e 20 ꝛc., ſo iſt der Maaßſtab fertig. Will man eine Linie die nach dieſem Maaßſtab 25 Fuß hält, auftragen, ſo eröffnet man den Zirkel ſo weit, daß, wenn die Spitze eines Schenkels in e angehalten wird, die andere bis 5 in ac reicht, und trägt dieſe Weite auf der gegebenen Linie aus dem gegebenen

Punkt

Punkt auf. Eine andere Gattung von Maaßſtäben iſt folgende. Wenn Fig. 99 ab eine Ruthe vorſtellt, ſo trage man ab von a bis m zehnmal auf, ſo daß am = 10 ab wird, am aber aus a in U, aus U in Z ꝛc. In m, a, U, Z ꝛc. errichte man die Perpendikel mn, as, UT, ZW &c Weil sn = am §. 64, ſo trage man ab auch von s bis n zehnmal auf, von m bis n und von Z bis W aber zuvor zehen gleiche Theile von beliebiger Größe, und ziehe durch die Theilungspunkte 11, 22, 33 ꝛc. die Linien 11, 22, 33 ꝛc. Endlich ziehe man noch die ſchieſen Linien nl, ok, ph &c. ſo hat man einen ſogenannten 1000theiligen Maaßſtab, wofern man von a nach Z die Linie am neunmal aufgetragen hat. Denn da jede Ruthe, wie ab = rs in 10 Fuße getheilt iſt §. 134, ſo iſt am = 10 ab in 100 Fuße eingetheilt, und am von a in U, von U in Z &c. noch neunmal aufgetragen, jede von $10° = 100'$ neunmal genommen, giebt 900 Fuße, alſo in allem ſammt am $1000'$. Zu

meh-

mehrerer Bequemlichkeit ſchreibt man in mn, ns, am, sn die Zahlen von 1 bis 10, bey UT aber 10, bey ZW 20 ꝛc. dazu, wie Fig. 99 zeigt. Der Gebrauch läßt ſich am beſten durch ein Beyſpiel zeigen. Man ſoll z. B. mit dem Handzirkel eine Linie faſſen, die nach dieſem verjüngten Maaßſtabe 25° 5′ = 255′ hält, ſo ſetze man den einen Zirkelfuß in Z und eröffne den Zirkel bis der andere Fuß in 5 f eintrift. Mit der Eröffnung fahre man aufwärts auf der Linie ZW bis die Zirkelſpitze in der Linie 55 eintrift, und erweitere den Zirkel noch bis in y, wo die ſchiefe Linie, die durch f 5 in am geht, mit der Linie 55 ſich durchſchneidet, ſo wird xw + wu + uy = 255′ ſeyn. Denn xw = 200′ wu = 5′ §. 134, yu = fa = 50′ alſo alles zuſammen = 255′. Die verjüngte Maaßſtäbe dienen beſonders entweder Linien, die man auf dem Felde gemeſſen hat, im verjüngten Maaße auf das Papier zu tragen, oder auch Linien, welche man mit dem Zirkel von Figuren, die in Grund gelegt ſind, abnimt,

auf

auf demſelben zu meſſen, oder zu finden, wie viel verjüngte Ruthen und Füße ſie haben. Wäre eine Linie, die man mit dem Zirkel abgenommen, ſo groß, daß, wenn man die eine Zirkelſpitze in x einſetzt, die andere genau in y eintrift, ſo würde dieſe Linie 255 Fuß nach dieſem Maaßſtabe halten. Man darf daher, wenn man die Linie, die man mit dem Zirkel abgenommen hat, meſſen will, nur mit einer Zirkelſpitze auf einer der Linien wie as, UT, ZW &c. je nachdem die zu meſſende Linie groß iſt, auf- und abfahren, und zuſehen, auf welcher von den Parallelen 11, 22, 33 ꝛc. die andere Spitze mit einem von den Durchſchnitten überein trift, welche die ſchiefen Linien wie nl, ok &c. mit dieſen Parallen machen.

§. 168. Die Fig. 100 zeigt noch eine andere Art Maaßſtabes, den man in Rückſicht des vorigen den hunderttheiligen nennen könnte. Man kann ihn auf folgende Art verfertigen. Man mache BC = CD &c.

=

= AB, und errichte in A, B, C, D Perpendikel. In AB, und DE trage man von A nach K und von D nach E fünf gleiche Theile von beliebiger Größe, und ziehe durch die Theilungspunkte gerade Linien. Die Linie KG = AB §. 64 halbire man in H §. 41, und ziehe HA, HB, ſo wird 1 a = $\frac{1}{5}$ HG §. 132 = $\frac{1}{10}$ KG = $\frac{1}{10}$ AB ſeyn §. 64, und aus ähnlichen Gründen 2b = $\frac{2}{10}$ AB &c. 6d = fd — 6f = AB — 6f = AB — $\frac{4}{10}$ AB = $\frac{6}{10}$ AB &c.

41. Satz. Aufgabe.

§. 169. Ueber einer gegebenen Linie MN auf dem Felde aus A durch Hülfe der Meßkette ein Perpendikel zu errichten, Fig. 101.

Aufloͤſung. Es ſey die Kette 50′ lang. Man mache AB der halben Ketten Länge, das iſt, für eine Kette von 50′ = 25′. In A und B laſſe man die Tragſtäbe mit den

En-

Enden der Kette einſetzen. Man faſſe das Mittel m der Kette, und ſuche den Punkt C, wo ſich beyde Hälften derſelben gleich und horizontal ſpannen. Den Punkt C bezeichne man mit einem Zeichenſtab, und ſpanne endlich die ganze Kette aus B über C horizontal bis in D aus, ſo wird die Linie aus dem gegebenen Punkt A durch den Endpunkt der Kette D, auf MN ſenkrecht ſeyn.

Beweis. $AB = AC = CB = CD = \frac{1}{2}$ Kettenlänge. Beſchreibt man daher aus C als Mittelpunkt mit CA einen Halbkreis, ſo iſt BD ein Diameter, und DAB = R. §. 103.

42. Satz. Aufgabe.

§. 170. Aus einem gegebenen Punkt A auf dem Felde auf eine gegebene Linie MN ein Perpendikel zu fällen. Fig. 102.

Aufloͤſung. Man nehme in MN zween Punkte B und C an, zwiſchen welche das Perpendikel dem Augenmaaße nach fallen muß, und meſſe in dem △ ABC alle drey Seiten, ſo wird der Punkt D wo die aus A auf MN ſenkrechte Linie auffaͤllt, von B um $BD = \frac{1}{2} BC + \frac{(AB+AC)(AB-AC)}{2\,BC}$ entfernt ſeyn.

Beweis. Es ſey BA = a. AC = b. BC = c. DB = x, alſo DC = c − x. Weil die △△ DAB, DAC rechtwinklicht ſind, ſo iſt §. 88 $a^2 - x^2 = ADq = b^2 - (c-x)^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$ und daraus $a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$ oder $a^2 = b^2 - c^2 + 2cx$, wenn $-x^2$ beyderſeits wegbleibt. Subtrahirt man noch beyderſeits $b^2 - c^2$, ſo erhaͤlt man $a^2 - b^2 + c^2 = 2cx$. Alſo $x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{c^2}{2c} + \frac{a^2 - b^2}{2c} = \frac{c}{2} + \frac{(a+b)(a-b)}{2c}$.

§. 171.

§. 171. Anmerkung. Was im vorhergehenden Beweiſe noch dunkel ſeyn könnte, iſt, daß $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ſeyn ſolle. Aber $(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$. Folglich iſt der Unterſchied der Quadraten zwoer Größen dem Produkte aus ihre Summe in ihre Differenz gleich.

§. 172. Wenn man aus zween Punkten B und E Fig. 103 die Linien BC, ED auf AF ſenkrecht, und beyde gleichgroß macht, ſo wird eine Linie durch die Endpunkte der Perpendikel C und D mit AF parallel ſeyn. §. 65. Dieſes kann dienen ein Hinderniß bey den Meſſungen gerader Linien umzugehen. Z. B. die Linie AF ſtreiche über einen Moraſt hin. In B, wo der Moraſt anfängt, ſetze man die Linie BC auf AB ſenkrecht, §. 169, und verlängere ſie bis in C, wo das Hinderniß vorbey iſt. In C errichte man abermal CD auf BC ſenkrecht, und verlängere ſie bis in D.

Endlich mache man noch DE auf CD ſenkrecht, und = BC. So wird man in E die Meſſung der geraden Linie AF fortſetzen, und CD ſtatt BE haben meſſen können.

43. Satz. Aufgabe.

§. 173. Die Krümmung, welche z. B. ein Stück Feld macht, in den Grund zu legen. Fig. 104.

Auflöſung. Da ſich hier eine genaue Beſtimmung weder erwarten läßt, noch nöthig iſt, ſo kann man der Aufgabe auf folgende Art Genüge leiſten.

I. Man wähle ſich eine gerade Linie AB, nahe an der krummen DECFGH und ſtecke dieſelbe nach §. 141 ab.

II. Man mache ſich ein Brouillon, das iſt, eine ohngefähre Handzeichnung auf einem Blättchen Papier von der krummen Linie,

nie, und wie ſie von der geraden geſchnitten wird. Die merklichern Wendungen, und wo die krumme Linie gegen die gerade zu hohl oder erhaben iſt, muß ohngefähr mit auf dem Brouillon angezeigt werden.

III. Man ſpanne eine Kette horizontal in der geraden Linie AB aus, und gehe von dem Annfangspunkt A nach D, bis ohngefähr in K zu der erſten Wendung. Iſt D nicht über 10 bis 12 Fuß von K entfernt, ſo lege man an D eine Meßlatte ſo an, daß ſie mit AB beynahe einen rechten Winkel in K macht. Auf dieſe Art hat man auf der Kette AK, auf dem Maaßſtabe KD in Fußen, und Zollen, und kann ſie in dem Brouillon auf den Linien, welche AK, und KD auf demſelben vorſtellen, anmerken. Wenn aber KD größer iſt als daß die Meßlatte zureichte, ſo kann man eine Schnur an D ſo anſpannen, daß ſie mit AB beynahe einen rechten Winkel macht, und an denſelben mit einem Maaßſtabe herCatchword: meſſen.

meſſen. Iſt die Schnur etwa ſelbſt in Füße eingetheilt, ſo könnte ſie allein dienen, die Linie KD beynahe zu beſtimmen. Denn da man die Lage der Punkte von der krummen Linie ohnehin nicht mit gar zu großer Genauigkeit zu beſtimmen ſucht, ſo möchte hier die Meſſung mit Schnüren vielleicht am rechten Ort angebracht ſeyn.

IV. Fährt man auf dieſe Art fort KL und LE, LC, dann CM und MF &c. zu meſſen, und im Brouillon anzumerken, ſo wird man im Stande ſeyn, die Krümmung ohngefähr auf folgende Art in Grund zu legen.

V. ab Fig. 105 ſtelle die Linie AB auf dem Felde vor, und Fig. 104 das Brouillon. Man gebe nach einem verjüngten Maaßſtabe den Linien ak, kl, lc, cm &c. auf ab ſo viel Füße als die in dem Brouillon angezeigte Linien AK, KL, LC &c. auf dem Felde gehabt haben.

VI.

VI. In k, l, m &c. errichte man Perpendikel auf eben der Seite von ab, als ſie in K, L, M &c. auf dem Brouillon als errichtet angezeigt ſind, und mache ſie im verjüngten Maaße ſo groß, als ſie nach der Anzeige des Brouillons auf dem Felde befunden worden ſind.

VII. Nachdem die Punkte d, e, c, f &c. in Grund gelegt ſind, ſo ziehe man mit freyer Hand durch dieſelben eine krumme Linie, doch ſo, daß man ſie zwiſchen zween aufeinander folgenden Punkten de, ec &c. hohl oder erhaben zeichne, je nachdem eines oder das andere zwiſchen zween korreſpondirenden Punkten in dem Brouillon angedeutet iſt.

§. 174. Anmerkung. Man nennt die Linie ab die Abſciſſenlinie, ak, al, am Abſciſſen, und kd, le, mf die denſelben zugehörigen Ordinaten.

Der

Der Meßtiſch.

§. 175. Der Meßtiſch iſt bey geometriſchen Meſſungen das bequemſte und brauchbarſte Inſtrument, weil man dadurch ſogleich eine Figur in Grund legen, oder eine ähnliche mit derjenigen, die auf dem Felde iſt, auf dem Papier entwerfen kann. Man hat ſeit der Zeit ſeiner Erfindung manches an dieſem Werkzeuge zu verbeſſern geſucht, und auch wirklich verbeſſert. Hieher kann man die Bemühungen eines Marinoni, Hogreus, Branders, Hrn Prof. Meyers ꝛc. rechnen. Der berühmte Hr. Mechanikus Brander hat ſeinen neuen geometriſchen Univerſalmeßtiſch und deſſen Gebrauch in einer zu Augsburg herausgekommenen kleinen Schrift bekannt gemacht. Zwote vermehrte Auflage 1772. Hieher gehört auch noch eine andere kleine Schrift ebenfalls von von Hrn. Brander mit dem Titel: Beſchreibung eines Spiegelſextanten, ingleichen eine neue Abänderung des Meßtiſches, wie auch eines ganz neuen Meßtiſches und ſogenannten Scheibeninſtru-

men-

mentes vom Jahre 1774. Herr Brander zeigt ohne weitläuftige Beſchreibung ſogleich den Gebrauch ſeines Meßtiſches. Das eigene des Marinoniſchen Meßtiſches beſteht darinn, daß ſich das Tiſchblatt über einer Vorrichtung in Nuthen hin- und herſchieben läßt, um einen gewiſſen Punkt des Tiſches genau über einem unter ihm auf dem Boden bringen zu können. Neuere Meßtiſche haben ſolche Vorrichtungen, wodurch das Tiſchblatt ſowohl nach ſeiner Länge als Breite verſchoben werden kann, um die eben angeführte Abſicht des Marinoniſchen noch beſſer zu erreichen. Herr Prof. Meyer hält dafür, daß die Meßtiſchchen dadurch zu ſchwer würden, und daß man die beſagte Abſicht durch andere Mittel z. B. durch eine gehörige Verruckung der Beine des Stativs auch erreichen könne. Herr Hogreue beſchreibt ſeinen Meßtiſch in der von ihm herausgekommenen praktiſchen Anweiſung zur topographiſchen Vermeſſung eines ganzen Landes 1773 im erſten Abſchnitt, wo er von

den

den Inſtrumenten von §. 17 bis §. 22 deutlich und vollſtändig handelt. Um eine kurze Beſchreibung dieſes ſo brauchbaren Werkzeuges zu geben, wähle ich hiezu den Meßtiſch des Hrn. Prof Meyers, ſo wie er ihn in ſeinem gründlichen und ausführlichen Unterricht zur praktiſchen Geometrie, 1ſten Theil §. 108 angegeben hat. Ich habe zu dieſem Ende ſeine Figuren beybehalten. Fig. 106 iſt ein perſpektiviſcher Aufriß des Meßtiſches, welcher ſammt Fig. 107, 108 und 109 die ganze Einrichtung begreiflich machen. AA Fig 108 iſt die Tiſchblatte, wie ein gewöhnliches Reißbrett, worauf man Papier an den vier ſchmalen Seiten ſpannen kann. Hr. Brander ſowohl als Hr. Hogreue und Hr. Prof. Meyer wollen dieſes Tiſchblatt, und zwar die zwey letzteren von gut ausgetrocknetem Lindenholz, nicht aus einem einzigen Brettholz, ſondern aus mehreren Stücken ſo zuſammgeſetzt und zuſammgeleimt wiſſen, daß die Holzfäden nicht nach einer Richtung laufen, ſondern einander kreuzen,

da-

damit ſich das Tiſchchen nicht ſo leicht werſe oder Riſſe bekomme, wenn es der Sonne ausgeſetzt wird. Weil die Fläche des Tiſches eine Ebene vorſtellen ſoll, ſo muß es wohl abgeglichen, und in dieſer Rückſich beſonders neue Platten öfter unterſucht werden. F, F, F Fig. 106 ſind die Beine des Statives, H iſt ein hölzerner Cylinder, welcher ſich, wie Fig. 107 zeigt, unten in g, g in ein dreyeckigtes Priſma endiget, an deſſen Seitenflächen die Beine anliegen und feſtgemacht werden können. Die hölzerne Vorrichtung M hat drey Arme c, c, c in W aber eine ſtarke hölzerne Schraube, womit ſie in den Cylinder H eingeſchraubet wird. Durch die Arme c, c, c ſelbſt gehen noch andere hölzerne Schrauben y, y, y. Die Abſicht dieſer Vorrichtung iſt, dem Tiſche mehr Feſtigkeit zu geben, und ihn in ſeiner horizontalen Lage zu erhalten. Ueber der Vorrichtung M iſt eine runde meßingene Platte, Fig. 109 die in der Mitte eine Hülſe hat, mit mehreren Schrauben befeſtiget, In dieſer Hülſe

iſt

iſt die meßingene Nuß m, welche ſich auf⸗wärts in einem hohlen Cylinder endiget, be⸗weglich. q, q ſind die Durchſchnitte dieſes hohlen Cylinders. In der Höhlung dieſes Cylinders iſt ein anderer maßiver Cylinder ebenfalls von Meßing n, der in dem hohlen genau einpaßt, beweglich, und beſteht mit der runden Platte a Fig. 108, wovon aa Fig. 109 der Durchſchnitt iſt, aus einem Stück. Die Platte aa iſt wegen leichterer Reibung mit einem kupfernen Ring umge⸗ben, Fig. 109 der an das Tiſchblatt mit den Schrauben d, d, d angeſchraubet iſt, ſo daß ſie ſich wie Fig. 109 im Durchſchnitte zeigt, in denſelben herumbewegen kann. Die Platte aa muß in die Einlaſſung des ku⸗pfernen Ringes einpaſſen, und beyde in ein⸗ander genau eingeſchmirgelt ſeyn, damit, wenn das Tiſchblatt, woran der kupferne Ring befeſtiget iſt, herumgedreht wird, die Bewegung ſo ſanft als möglich ſey. Die Stellſchraube x durch den hohlen Cylinder dient den andern Cylinder n feſtzuhalten, ſo

wie

wie die andere Schraube bey z die Nuß in einer unverruckten Lage zu erhalten. An der Platte aa des Cylinders n Fig. 109 iſt ein Aermlein u angelöthet, welches einen Anſatz o tragt, Fig. 108; deßgleichen auch an dem Tiſchchen einer bey e iſt. Durch beyde Anſätze geht ein Schräubchen z, welches, wenn es gezogen wird, dem Tiſchchen kleine und ſanfte Bewegungen und Wendungen um die Achſe des Cylinders n verſchaft.

§. 176. Will man die Ebene des Tiſches horizontal machen, ſo ſuche man durch wiederholte Verſuche die Beine des Stativs ſo zu ſtellen, bis ohngefähr das Tiſchblatt AA eine horizontale Lage hat. Dann laſſe man die Schrauben y, y, y herunter, und die Schraube, welche die Nuß ſtellt, los, um die Nuſſe m in ihrer Hülſe drehen zu können. Man wende ſodann das Tiſchchen in der Hülſe ſo lang herum, bis eine auf die Ebene des Tiſches geſetzte Waſſerwaage anzeigt, daß die Fläche des Tiſchchens horizon-

tal

tal ſey. Iſt dieſes geſchehen, ſo ſchraube man die Schrauben y, y, y bis unter das Tiſchchen, welche nicht nur allein der Nuſſe nach angezogenen Schrauben Z Fig. 109 die horizontale Lage erhalten helfen; ſondern ſelbſt, im Falle, daß kleine Verrückungen geſchehen ſollten, die horizontale Lage wieder herzuſtellen dienen können, wenn ſie gehörig gezogen werden, bis eine auf dem Tiſch geſetzte Waſſerwaage einſchlägt. Hat das Tiſchchen die gehörige horizontale Lage, ſo wird es ſich auch horizontal herumwenden laſſen, wenn man die Stellſchraube x lüftet, weil ſich ſodann der Cylinder n ſammt dem Tiſchblatte in dem hohlen Cylinder, woran die Nuß befindlich, und durch die Stellſchraube z befeſtiget iſt, herumdrehen läßt. Stellt man mit der Schraube x den Cylinder n, und zieht das Schräubchen z unter dem Tiſche Fig. 108, ſo kann man dem Tiſche kleine und ſanfte Bewegungen um den befeſtigten Cylinder n verſchaffen. Hr Prof. Meyer macht zuletzt noch die Bemerkung, daß die

Schrau-

Schrauben y, y, y und die Nuß zuſammen, dem Meßtiſche einen ſehr feſten Stand geben, den man ohne die Schrauben y, y, y mit der Nuß allein nicht erhalten würde. Eine Bemerkung von deren Wahrheit ſich diejenigen am beſten überzeugt haben werden, die Meſſungen mit Tiſchchen unternommen haben, deren feſter Stand auf einer zumal kleinen ausgegangenen Nuß beruhte.

§. 177. Wenn man auf der Ebene eines Lineals, an deſſen beyden Enden ſenkrechte Linien errichtet, um längſt denſelben nach einem gewiſſen Gegenſtand hinausviſiren zu können, ſo hat man ein ſogenanntes Diopternlineal. Dieſe ſenkrechte Linien ſollten eigentlich in einer ſenkrechten Ebene durch die Schärfe des Lineals liegen, wenn das Diopternlineal für den Meßtiſch beſtimmt iſt. Die Einrichtung zeigt Fig. 110. Meiſtens ſind die Dioptern um ein Gelenke beweglich, ſo daß man ſie niederlegen kann. Die vordere Diopter nennt man die objektive

Diop-

Diopter, die hintere, woran man beym Abſehen das Aug hält, die Okulardiopter. Das Dioptern- oder Abſehelineal ſoll ſo lang als der Tiſch ſeyn. In dem Objektivdiopter iſt ein Silberfaden oder Pferdhaar ſenkrecht auf die Fläche des Lineals ausgeſpannt, und ſoll durch ein Schräubgen angezogen werden können. Die Okulardiopter hat einen Schlitz mit mehreren kleinen Löcherchen, um dadurch die Gegenſtände leichter zu erblicken. Der Schlitz ſoll übrigens enge ſeyn, weil ſonſt je nachdem man das Aug etwas weniges mehr rechts oder links hält, das Objekt durch den Faden des Objektivdiopters bald bedeckt zu ſeyn ſcheint, bald nicht, welches, wenn man das Aug nicht jedesmal gleich an die Okulardiopter anhält, Unrichtigkeiten verurſachen kann. Ueberhaupt ſollen die Dioptern hoch ſeyn, um auch etwas mehr erhöhte oder vertiefte Gegenſtände dadurch ſehen zu können. Das ganze Werkzeug iſt meiſtens von Meſſing. Zuweilen iſt noch in der Mitte eine Magnetnadel angebracht. Daß man Fehler be-

ge-

gehen könne, wenn der Schlitz und Faden der Dioptern nicht in der ſenkrechten Ebene auf jene des Lineals durch ihre Schärfe liegen, erhellet aus Fig. 111, wo ich annehme, daß ſich der Schlitz und Faden in der Mitte des Lineals befinden. Denn man zieht auf dem Tiſche die Linien gc, gC, wenn man nach den Objekten x und y vermittelſt der Dioptern hinviſirt; folglich ſollte der Winkel $xgy = cgC$ ſeyn. Aber $xgy = xgc + cgy$, und $cgC = cgy + ygC$. Alſo $xgy - cgC = xgc + cgy - cgy - ygC = xgc - ygC$. Daher müßte $xgc - ygC = 0$ ſeyn. Wenn $xgy = cgC$ ſeyn ſollte. Man fälle aus g auf die mittleren Linien AB, ab, wodurch die Ebene geht, in welcher ſich der Schlitz und Faden befinden, die Perpendikel ge, gf, ſo iſt $ge = gf$; folglich, wenn x weiter wegliegt, als y, der Winkel $Cgy = fyg$ §. 57. III. $> exg = xgc$. Denn, wenn Fig. 112 über einerley Grundlinie ge in der auf ge ſenkrechten Linie ex der Punkt x weiter entfernt iſt, als y, und man zieht gy, gx, ſo wird $gye > gxe$ §. 45.

§. 178. Die gewöhnlichen zylindriſchen gemeinen Waſſerwaagen ſind bekannt. Fig. 113 iſt eine Abbildung davon. Diejenige aber, welche Hr. Prof. Meyer im erſten Theil ſeines gründlichen Unterrichts ꝛc. §. 113 beſchreibt, beſteht aus einem etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll hohen und weiten zylindriſchen Gefäſſe Fig. 114, welches oben mit einem etwas hohl geſchliffenen Glasdeckel bdc, den man auf und abſchrauben kann, verſchloſſen. Unten bey g iſt ein kleines in der untern Grundfläche des Gefäſſes eigelaſſenes Schräubchen angebracht. Die Mitte des Glasdeckels i iſt mit einem beliebigen Zeichen z. B. einem Kreuz bemerkt. Wenn man die Waſſerwaage brauchen will, ſo füllt man das Gefäß voll mit einer Flüßigkeit z. B. Waſſer, und verſchließt es feſt mit dem Glasdeckel, welcher alsdenn genau mit der untern Grundfläche parallel ſeyn muß. Nimt man das Schräubchen g heraus, und läßt einen Tropfen Waſſer aus dem Gefäſſe, ſo wird Luft eindringen, und oben unter dem Glasdeckel

ſich

ſich eine Blaſe zeigen. Iſt die Blaſe zu klein, ſo iſt ſie zu wenig empfindlich, man muß daher durch mehrere Verſuche ihr eine gehörige Größe zu geben ſuchen. Weil der Glasdeckel von innen etwas hohl geſchliffen iſt, ſo wird die natürliche Ungleichheit des Glaſes der Bewegung des Bläschens weniger Hinderniß entgegenſetzen. Aus der Erfahrung iſt bekannt, daß die Richtung der Schwere auf die Ebene eines ruhenden Waſſers ſenkrecht und daher dieſelbe horizontal ſey. Da der Glasdeckel mit der Grundfläche parallel iſt, ſo wird die Ebene, worauf das Gefäß geſetzt wird, mit der Waſſerfläche parallel, alſo horizontal ſeyn, wenn das Bläschen in der Mitte erſcheint. Bey jeder gegen dem Horizont geneigten Lage wird das Bläschen, welches als Etwas leichteres, als Waſſer, den hochſten Ort ſucht, nicht in der Mitte des Glasdeckels zum Vorſchein kommen, welche Mitte aus dieſem Grunde durch was immer für ein Zeichen bemerkt ſeyn muß. Setzt man daher dieſes Gefäß auf die Platte des

Meßtiſches, und wendet das Tiſchchen in der Nuſſe ſo lang herum, bis ſich das Bläschen in der Mitte zeigt, ſo iſt die Ebene des Plattes, welche mit der Grundfläche des Werkzeugs einerley iſt, horizontal.

§. 179. Um einen Punkt auf dem Tiſche zu beſtimmen, der in einer ſenkrechten Linie über einem gegebenen Punkt auf dem Boden unter dem Tiſche liegt, kann man ſich der Gabel Fig. 115 bedienen; wo ac parallel mit bd und ac=bd ſeyn muß. Die Weite zwiſchen den Armen cd muß ſo groß ſeyn, daß man die Dicke der Platte des Meßtiſches dazwiſchen faſſen, und die Gabel an dieſelbe ſchieben kann. Der obere Arm ac endiget ſich in einer Spitze a, und der Senkel muß mit ac und bd in einer Ebene liegen.

44. Satz. Aufgabe.

§. 180. Die Größe eines auf dem Felde gegebenen Winkels, den zwo nach den

Objek-

Objekten A und B gezogene Horizontallinien xa, xb miteinander machen, auf dem Meßtiſche zu beſtimmen.

Auflöſung. I. Man bringe den Meßtiſch über den Scheitel des Winkels x, man ſtelle die Beine feſt, und wende nach herabgelaſſenen Schrauben y, y, y die Platte vermittelſt der Nuſſe ſo lang herum, bis die Blaſe der aufgeſetzten Waſſerwaage die horizontale Stellung zeigt, wozu man die Schrauben y,y zu letzt noch zu Hülfe nimt, und ſie wieder anziehet. Es ſtelle defg das Tiſchchen Fig. 116 vor, nachdem es horizontal gemacht worden iſt. x ſey der Punkt unter demſelben, und axb der Winkel, den zwo Horizontallinien xa, xb auf dem Felde machen. Man nehme die Gabel, ſtoſſe ſie an die Platte, bis der Senkel des untern Armes derſelben über x iſt, ſo wird das Ende des andern über dem Tiſche den Punkt C angeben, der in der Verlängerung des Senkels über x liegt.

II.

II. In den Punkt C ſtecke man eine ſehr feine Nehenadel, lege die Schärfe des Diopternlineals an dieſe Nadel, und drehe das Lineal an derſelben ſolang herum, bis das Objekt A oder eigentlich ein kennbarer Punkt deſſelben von dem in dem Objektivdiopter ausgeſpannten Faden bedeckt zu ſeyn ſcheint, wenn man durch den Schlitz des Okulardiopters dahin viſirt. So bald als dieſes geſchieht, ſo

III. Drücke man das Lineal etwas an, um es in unverruckter Lage zu erhalten, und ziehe långſt der Schärfe deſſelben mit Bleyſtift die gerade Linie ch. Hiebey iſt wohl Acht zu haben, daß die Schärfe des Lineals immer wohl an der Nadel liege, und daß das Lineal in unverruckter Lage erhalten werde, während die Linie an der Schärfe deſſelben gezogen wird. Auch muß die Linie ſo fein als möglich ſey, und zu dieſem Ende der Bleyſtift wohl geſpitzt werden.

IV.

IV. Auf die nämliche Art viſirt man auch nach B hin, und zieht die Linie Ck. Da der Schlitz im Okular, und der Faden im Objektivdiopter vermittelſt ihrer Konſtruktion beyde ſenkrecht auf die Fläche des Lineals durch deſſelben Schärfe ſind, ſo ſind ſie auch ſenkrecht auf die Fläche des Tiſches, welcher horizontal, und mit der Ebene des Lineals, das auf demſelben liegt, einerley iſt. Folglich liegen das Objekt A, der Faden des Objektivdiopters, der Schlitz des Okulardiopters und der Punkt c alle in einer vertikalen Ebene durch das Loth cx §. 305; worinn die nach A gezogene Horizontallinie xa ſich befindet, wenn man nach A viſirt. Daher liegen CA, xa in einerley Ebene CxaA, und weil die Platte horizontal iſt, auch in horizontalen und parallelen Ebenen; ſie ſind alſo parallel §. 13. Eben dieſes gilt auch in Rückſicht der Linien CB, xb; folglich iſt ACB = hCk = axb. §. 308.

§. 181.

§. 181. Anmerkung. Indem ich erſt folgende Sätze und §§phen anführe, ſo begehe ich allerdings einen Fehler wider die mathe- mathematiſche Methode; aber mit Abſicht. „Die Ungeduld, ſagt Herr Hofrath von „Käſtner, mit welcher Anfänger insgemein „eine Anwendung der theoretiſchen Lehren „auf dieſe ſogenannte Ausübung verlangen, „läßt ſich auf eine ſolche Art ſtillen, daß „ſie empfinden, es ſey noch mehr Theorie „nöthig, wenn die Ausübung ihre gehöri- „ge Richtigkeit haben ſoll, und alſo auf „Sätze aufmerkſam werden, die ſie ſonſt „als leere Betrachtungen würden verab- „ſäumt haben.“

§. 182. Wenn eine Linie cy auf dem Meßtiſche und in derſelben ein Punkt c gegeben iſt, und man ſoll den Punkt c über einen auf dem Felde gegebenen Punkt x die Linie cy aber in die Lage ch bringen, in welcher ſie nach einem gewiſſen Objekt A hin liegt, ſo kann dieſes auf folgende Art bewerkſtelliget werden.

Man

Man ſtelle den Meßtiſch über x, mache ihn horizontal §. 176, und lege das Diopternlineal an cy. Dann lüfte man die Schraube x Fig. 109 am Meßtiſche, und drehe die Platte ſammt dem Lineal, welches an cy anliegt, herum, bis man durch die Dioptern das Objekt A erblickt. In dieſer Lage befeſtige man den Zylinder n des Meßtiſches, indem man die Schraube x wieder anzieht. Hat ſich das Tiſchchen dadurch um etwas verrückt, ſo kann man ihm durch die Schraube z Fig. 108 nachhelfen, und das Lineal wieder in die gehörige Lage bringen. Steckt man die Gabel Fig. 115 an die Platte, und ſchiebet ſie an, bis derſelben Spitze a den Punkt c Fig. 116 berührt, ſo wird der von dem andern Arm der Gabel herabhangende Senkel anzeigen, ob c ſenkrecht über x liegt oder nicht. Liegt c nicht über x, ſo muß man durch die Verruckung der Beine des Stativs dem Tiſchchen nach und nach eine Stellung zu geben ſuchen, wodurch c über x zu liegen kommt, wenn cy nach A eingerichtet iſt.

§. 183.

§. 183. Die Nadel, womit man auf dem Tiſche den Punkt c bezeichnet, um an demſelben das Lineal anzulegen, muß ſehr fein ſeyn, und wer ſie entbehren kann, thut noch beſſer, wenn er nach dem Rathe des Hrn. Prof. Meyers an den Punkt c ohne eine Nadel einzuſtecken, anlegt, obſchon einige Uebung erfodert wird, bis man eine Fertigkeit hierinn erlangt. Denn, wenn die Nadel einige Dicke hat, ſo zieht man die Linien eigentlich an der Peripherie eines zwar ſehr kleinen Kreiſes, und nicht aus einem Punkte.

§. 184. Bey Diopternlinealen können zuweilen die Gegenſtände, nach welchen man ſein Abſehen nehmen ſoll, ſo hoch oder tief in Ruckſicht der Ebene des Tiſches liegen, daß man ſie nicht mehr ſehen kann. In dieſem Falle kann man in der geraden Linie oder Vertikalebene nach den Gegenden hin Stäbe oder Stangen an Oerten ſtecken laſſen, wo man ſie durch die Dioptern erſehen kann.

§. 185.

§. 185. Vorzüglich nothwendig iſt es, Acht zu haben, daß man den Tiſch während der Arbeit in unverruckter Lage erhalte. Hat man z. B. die zwo Linien ch, ck nach den Gegenſtänden A und B gezogen, welche den Winkel hCk = axb auf dem Tiſche machen, ſo lege man nachdem man mit der Arbeit bey ck fertig iſt, nochmal an die zu erſt gezogene Linie ch mit dem Diopternlineal an, und ſehe, ob man den Gegenſtand A noch in der Richtung ch erblickt. Geſchieht dieſes nicht, ſo iſt der Tiſch ohnläugbar verrückt worden, und man muß die Arbeit nochmal wiederholen.

§. 186. Die Magnetnadel, deren ſich einige bedienen, um den Tiſch in der gehörigen und unverrückten Lage zu erhalten, iſt bey weitem nicht das beſte Mittel zu dieſer Abſicht. Außerdem, daß oft zufällige Urſachen auf die Richtung der Nadel Einfluß haben, z. B. ein in die Nähe gebrachtes Stück Eiſen, ſo ſind ſie meiſtens ſo empfind-

lich

lich nicht, daß ſie kleine Veränderungen in der Lage des Tiſches anzeigen ſollten; auch kömmt es darauf an, wie man die Nadel anſieht, wenn ſie am nämlichen Punkte wirklich einſchlagen, nicht bloß einzuſchlagen ſcheinen ſoll. Beſſer hiezu ſind Verſicherungsdioptern, die man an der untern Fläche des Tiſches anbringen kann. Sieht man durch dieſelbe irgendwo ein kenntliches Objekt, nachdem der Tiſch gehörig geſtellt iſt, ſo darf man nur von Zeit zu Zeit und nach vollendeter Arbeit nachſehen, ob der Faden im Verſicherungsdiopter immer einerley Gegenſtand bedeckt, wenn man ſich von der unveränderten Lage des Tiſchchens verſichern will. In dem Falle, wo die Verſicherungsdioptern auf kein kenntliches Objekt zutreffen, kann man eine Meßfahne, oder ſonſt einen Stab in einiger Entfernung ſo einſtecken laſſen, daß man bey gehöriger Stellung des Meßtiſches dieſelbe durch die Verſicherungsdioptern erblicke.

§. 187.

§. 187. Die Lineale mit Dioptern haben das Unbequeme für Kurzſichtige, daß ihnen weit entlegene Objekte, wenn ſie nach denſelben viſiren, entweder gar nicht, oder nicht deutlich genug erſcheinen. Auch kann man dadurch Gegenſtände, die entweder etwas höher oder tiefer liegen, nicht ſehen, und man muß ſich immer in dergleichen Fällen des zu Ende §. 184 erwehnten Mittels bedienen. Allen dieſen Unbequemlichkeiten hilft eine Regel mit einem beweglichen Fernrohre ſtatt der Dioptern, ab. Denn durch das Fernrohr ſieht man entfernte Gegenſtände vergrößert, und deutlich, und wenn es um eine Achſe beweglich iſt, ſo läßt es ſich auch auf erhöhete und vertiefte Gegenſtände richten. Gemeiniglich beſtehen die Fernröhren aus zwo Röhren, wovon eine in die andere eingeſchoben werden kann. Die eine Röhre enthält das Objektiv, die andere das Okularglas, wo man das Aug anhält, wenn man auf gewiſſe Gegenſtände viſirt. In dem Orte, wo das Bild von einem

nem unendlich weit entfernten Gegenſtand erſcheinen würde, den man den Brennpunkt nennt, ſind Kreuzlinien angebracht, die ſich ſenkrecht ſchneiden, um dadurch ſo ſcharf als möglich, kleine Theile von Gegenſtänden faſſen zu können. Im übrigen iſt die Einrichtung ſo beſchaffen, daß man nach Beſchaffenheit der Augen desjenigen, der viſirt, die Entfernung der beyden Gläſer größer oder kleiner machen kann, je nachdem man die Röhre des Okulars in die andere mehr einſchiebt, oder von derſelben herauszieht. Vermöge der Anzahl der Gläſer, die ſie meiſtens haben, zeigen ſie die Gegenſtände verkehrt, woran hier nichts gelegen iſt. Fig. 117 iſt eine Abbildung eines Lineals mit einem beweglichen Fernrohre. Die Vergrößerung darf bey dergleichen Fernröhren ſo groß eben nicht ſeyn. Nöthiger iſt, daß ſie hell und deutlich zeigen. Wenn die Kreuzlinien nicht in einer auf die Achſe der Gläſer ſenkrechten Ebene durch den Brennpunkt ſich befinden, ſo werden, je nachdem man das Aug an

das

das Okular hält, bald dieſe bald jene Theile des Gegenſtandes von den Fäden bedeckt zu ſeyn ſcheinen, welches zu kleinen Unrichtigkeiten in der Stellung des Werkzeuges Anlaß geben kann. Ob aber die Kreuzlinien in ihrem gehörigen Orte ſind, kann man erfahren, wenn man das Fernrohr nach einem weit entfernten Gegenſtande richtet, und ſieht, ob der Gegenſtand ſowohl als die Fäden beyde zugleich deutlich erſcheinen. Außerdem wird man das Bild vom Gegenſtande vor oder hinter den Fäden ſehen. Wenn man die Röhre des Objektivs in oder um die unbewegliche Röhre des Okulars von Jemanden drehen läßt, während man auf einen Gegenſtand viſirt, ſo muß das Bild unbeweglich ſcheinen, wenn das Werkzeug nicht eine kleine Unvollkommenheit haben ſoll.

§. 188. Wenn ſchon die Lineale mit beweglichen Fernröhren merkliche Vorzüge vor den Linealen mit Dioptern haben, ſo können doch beträchtliche Fehler entſtehen,

wenn

wenn die Ebene des Tiſches nicht genau horizontal iſt, und beſonders auf vertiefte oder erhöhte Gegenſtände viſirt werden muß; wenn die Achſe, um welche das Fernrohr beweglich iſt, eine Neigung gegen die Ebene des Lineals hat, wenn die Achſe des Fernrohres mit der Achſe um die es ſich bewegt, keinen rechten Winkel macht.

§. 189. Iſt die Achſe des Fernrohrs nicht in einer ſenkrechten Ebene auf jene des Lineals beweglich, ſo entſtehen Fehler in den Winkeln, die man ohngefähr aus dem Folgenden beurtheilen kann. ab Fig. 118 ſey ſenkrecht auf die Ebene des Lineals MN. Die Ebene hklm ſey durch ab gelegt, lm die Achſe, an welcher ſich jene des Fernrohres CD bewegt. Wenn um $mbC = lbC = R$ und lm auf ab ſenkrecht iſt, ſo wird das Fernrohr in jeder Neigung C′D′ in der auf MN ſenkrechten Ebene bagC ſich befinden. Denn ſo iſt $mbC = mbC' = mba = R$. Folglich ſind bC, bC′, ba in einerley Ebene

bagC

bagC §. 304. Die, weil ſie durch das Loth ab gelegt iſt, auf MN ſenkrecht iſt. §. 305. Iſt die Ebene des Lineals horizontal, und geht die auf MN ſenkrechte Ebene bagC, in welcher ſich die Achſe des Fernrohrs bewegt, durch die Schärfe des Lineals, ſo liegt die Viſirlinie, und diejenige, welche an der Schärfe des Lineals auf dem Tiſche gezogen wird, beyde in der nämlichen Vertikalebene, die Achſe mag horizontal oder geneigt ſeyn, wie man will. Bewegte ſich die Achſe des Fernrohrs zwar in einer auf MN vertikalen Ebene, die aber nicht durch die Schärfe des Lineals gienge, ſondern in einer durch derſelben parallelen, ſo würde das Werkzeug den Fehler haben, welcher in Rückſicht der Dioptern, wenn ſie ſich in der Mitte auf den Linealen befinden §. 177, iſt angeführt worden. Wenn die Achſe des Fernrohrs mit jener der Bewegung im keinen rechten Winkel macht, ſondern ſich auf die eine Seite mehr neigt, ſo beſchreibt ſie, wenn ſie ſich bewegt, keine Ebene, ſondern krumme Fläche, wie man ſich leicht

überzeugen kann, wenn man eine Linie, die mit einer andern einen ſpitzigen Winkel macht, um dieſelbe als eine Achſe dreht. Allein da dieſe Abweichung vom rechten Winkel, wenn das Werkzeug nicht durch zu ungeſchickte Hände iſt verfertiget worden, meiſtens ſehr klein seyn wird, ſo werden auch die daher allein zu befürchtenden Unrichtigkeiten ganz unbeträchtlich ſeyn. Aber wenn die Achſe der Bewegung lm, ſchief gegen die Ebene des Lineals ſteht, ſo bewegt ſich offenbar die Achſe des Fernrohrs in keiner auf MN ſenkrechten, ſondern Fig. 119 in einer ſchiefen Ebene Cbyg, wo ba auf die Ebene des Lineals MhN ſenkrecht angenommen wird, und MN die Schärfe des Lineals, ml die geneigte Achſe, um die ſich das Fernrohr bewegt, CD, C'D' die Achſe des Fernrohrs in verſchiedenen Lagen, PCM, PC'x aber ein paar durch das Loth Pa gelegte alſo vertikale Ebenen §. 305 vorſtellen. Denn alsdann iſt mb nicht auf ab, wie Fig. 118, ſondern auf eine andere Linie, z. B. by, in der

durch

durch ba gelegten Ebene klmh ſenkrecht, und daher liegt die Linie, in welcher man nach dem Gegenſtande viſirt, mit der Linie, die man an der Schärfe zieht, nicht in einerley Vertikalebene, auch nicht in einer parallelen Vertikalebene, ſondern, wenn z. B. die Achſe des Fernrohrs in C′D′ ſich befindet, in der ſenkrechten Ebene C′bax §. 305, ſo daß die Ebene durch die Schärfe des Lineals MN mit der durch C′D′ gelegten ſenkrechten Pxa den Winkel Max macht §. 295. Dieſer Winkel Max wird deſto größer ſeyn, je größer die Neigung der Achſe ml gegen die Ebene des Lineals MhN, und jene des Fernrohrs C′D′ in der Ebene Cbyg iſt. Erhebt man die Achſe des Fernrohrs, über deſſen horizontalen Stand CD, ſo fällt der Winkel Max auf die andere Seite; folglich je nachdem die Achſe des Fernrohrs verſchieden geneigt iſt, deſto mehr oder weniger wird der Winkel Max, um den eigentlich gefehlt wird, betragen.

§. 190. Es können auch Fehler in den Winkeln entſtehen, wenn beſonders bey dem Gebrauche des Lineals mit einem beweglichen Fernrohr die Ebene des Tiſches nicht horizontal iſt. ABGF Fig. 120 ſey eine Horizontalebene durch den Mittelpunkt um welchen das Lineal bewegt wird. ABED ſtelle die gegen den Horizont geneigte Ebene des Tiſches vor. Die Linie AC ſey aus dem Mittelpunkt der Bewegung parallel mit der Achſe des Fernrohrs in der Lage, wo nach dem erſten Gegenſtand viſirt wird, AC′ aber parallel mit der Achſe des Fernrohrs, wo es nach dem zweyten Gegenſtand hingerichtet war. Man beſchreibe mit AB in der Ebene des Tiſches den Bogen BED, in der Horizontalebene den Bogen BGF. Die Ebenen ACD, AC′E ſeyen auf jene des Tiſches, die Ebenen ACF, AC′G auf den Horizont ſenkrecht, ſo wird GAF der Winkel ſeyn, welchem die durch die Achſe in beyden Lagen des Fernrohrs gelegten Vertikalebenen in der Horizontalebene machen, und der eigentlich geſucht wird,

EAD

EAD aber derjenige, den man auf der geneigten Ebene des Tiſches erhält, wenn man an der Schärfe des Lineals die Linien AD, AE zieht. Je nachdem nun die Achſe des Fernrohrs in beyden Lagen verſchieden geneigt iſt, ſo wird der Winkel GAF von EAD mehr oder weniger verſchieden ſeyn. Daß die Größe der Abweichung von dem geſuchten Winkel ſowohl von der Neigung des Tiſches gegen den Horizont, als den in beyden Lagen des Fernrohrs verſchiedenen Neigungen deſſelben gegen jene des Tiſches ankomme, wird man gewahr werden, wenn man ſich alles gehörig, und in verſchiedenen Lagen vorſtellt. Da hier offenbar von der Lage der Ebenen gegeneinander die Rede iſt, ſo läßt ſich die Größe der Winkel EAD und GAF, folglich auch ihr Unterſchied ohne die ſphäriſche Trigonometrie nicht beſtimmen. Ich begnüge mich daher mit den bisherigen Betrachtungen, welche wenigſtens die Möglichkeit von einer Verſchiedenheit der Winkel EAD, und GAF beweiſen.

§. 191.

§ 191. Weil Figuren durch Hülfe des Meßtiſches in Grund legen, eigentlich nichts anders als ähnliche kleinere auf demſelben entwerfen heißt; ſo fehlt man allerdings, wenn man andere Winkel auf dem Tiſche erhält, als diejenige auf dem Felde ſind, die ſie vorſtellen, und denen ſie vermöge der Aehnlichkeit der Figuren gleich ſeyn ſollten. Man betrachtet gemeiniglich die kleinen Fehler, welche dadurch entſtehen können, wenn z. B. die Kreuzfäden im Fernrohr nicht am gehörigen Orte ſind, wenn die Achſe der Bewegung eine Neigung gegen die Ebene des Lineals hat, wenn die Achſe des Fernrohrs nicht auf der Achſe der Bewegung ſenkrecht iſt, wenn ſich die Achſe des Fernrohrs nicht in einer anf die Ebene des Lineals vertikalen Ebene durch die Schärfe des Lineals bewegt, wenn die Ebene des Tiſches nicht horizontal iſt; man betrachtet, ſage ich, jede dieſer kleinen Unvollkommenheiten einzeln und abgeſöndert von den übrigen, um den Einfluß jeder einzelnen zu beſtimmen. Wenn aber

bey

bey dem Gebrauche eines Lineals mit einem beweglichen Fernrohre beſonders die Neigung der Achſe der Bewegung gegen die Ebene des Tiſches, und die Neigung der Ebene des Tiſches gegen die Horizontalfläche jede einzeln allein ſchon nach den darüber für gewiſſe Lagen angeſtellten Berechnungen ziemlich beträchtliche Fehler veranlaſſen können, ſo läßt ſich der Schluß ganz leicht machen, daß die Gefahr zu fehlen, und die Größe der Fehler ſelbſt deſto beträchtlicher ſeyn werde, wenn mehrere dieſer kleinen Unvollkommenheiten unter gewiſſen Umſtänden einen Winkel zu vergrößern oder zu verkleinern zuſammen wirken.

§. 192. Fig. 117 ſtellt ein Lineal mit einem beweglichen Fernrohr vor. Das ganze Werkzeug iſt von Meßing. Die Röhre iſt in einer Hülſe k durch zwo Stellſchrauben d, d befeſtiget, und um ein Zirkelgewinde in x beweglich. Die ganze Vorrichtung endiget ſich unten in eine runde Platte tmz die kugelförmig erhaben iſt. Auf dem Lineale ſelbſt

in deſſen Mitte, welche zu dieſem Ende eine größere Metaldicke erhält, iſt eine kugelförmige Vertiefung ausgedreht, in welche die erhabene Platte paſt, und eingeſchmirgelt iſt. Doch muß die Sache ſo eingerichtet werden, daß das Stück tmz etwas weniges über die Vertiefung hervorrage bey t und z. Nahe an dem Umfange der Vertiefung ſind vier Schraubenmütter angebracht. Wird nun die Vorrichtung in ihrer Lage eingeſetzt, ſo kann man vermittelſt vier Schrauben, welche in die vier Schranbenmütter paſſen, dieſelbe in ihrem Lager etwas weniges verſchieben, je nachdem man dieſe oder jene Schraube mehr anziehen läßt, und dadurch zuwege bringen, daß die Achſe die Bewegung mit der Ebene des Lineals genau parallel werde. Die ganze Einrichtung iſt ſehr einfach und zweckmäßig, beſonders da man dadurch ſowohl der Achſe der Bewegung als auch dem Fernrohre in ſeiner Hülſe die gehörige Lage ſelbſt geben kann, ohne ſich auf die Geſchicklichkeit des Künſtlers allein verlaſſen zu dürfen. Denn ſind

die

die Theile von dem Mechaniker ſo zuſammengeſetzt, daß ſich in ihrer Lage nichts mehr verändern läßt, ſo kann man den Werkzeugen ihre gehörige und nöthige Vollkommenheit nicht geben, auch nachdem man ſich durch Verſuche von ihrer fehlerhaften Einrichtung überzeugt hat, es mögen die Inſtrumente gleich Anfangs einige kleine Unvollkommenheiten in der Lage und Verbindung ihrer Theile gehabt, oder durch Zufälle nach der Hand erſt erhalten haben.

§. 193. Gegenwärtiges Fernrohr Fig. 117 iſt ohngefähr ſo, wie es Herr Prof. Meyer für ſein Schreibeninſtrument verlangt. Bey dieſer Einrichtung iſt zwar die Axe des Fernrohrs nicht in einer ſenkrechten Ebene durch die Schärfe des Lineals beweglich. Allein es würde ſich von einem geſchickten Künſtler leicht eine Vorrichtung ausdenken laſſen, wodurch man auch dieſes erhielte. Denn ſonſt hat das Inſtrument den für die Lage der Diopter in der Mitte §. 177 ange-

ge-

geführten Fehler, welcher, wenn ein Gegenſtand ſehr nahe, der andere aber weit entlegen iſt, in dem Winkel, welchen man erhält, wenn man an der Schärfe des Lineals Linien zieht, ziemlich beträchtliche Fehler veranlaſſen kann.

§. 194. Um das Inſtrument vor dem Gebrauche zu prüfen, ſo mache man den Tiſch vermöge einer guten Waſſerwage ſo genau horizontal als möglich. Man laſſe in einiger Entfernung ein Loth, um die Spielung zu vermeiden, in ein mit Waſſer gefülltes Gefäß frey herabhängen, und drehe das Lineal ſo auf dem Tiſche, bis man den Faden des Lothes genau in dem Durchſchnitte der Kreuzlinien des Fernrohrs erblicke, wobey die Achſe des Fernrohrs ohngefähr horizontal ſeyn mag. Man bewege ferner bey unverrückter Lage des Lineals das Fernrohr über und unter die Horizontallinie: verläßt der Durchſchnitt der Kreuzlinien das frey hangende Loth, ſo bewegt ſich ganz zuver-

läßig die Achſe des Fernrohrs nicht in einer ſenkrechten Ebene auf jene des Horizonts, und die Achſe der Bewegung macht mit der horizontalen Ebene des Tiſches oder der Ebene des Lineals, welche mit jener des Tiſches, worauf ſie ſteht, einerley iſt, eine Neigung, die man daher durch die Verrückung der Vorrichtung in der kugelförmigen Aushöhlung §. 192 durch wiederholtes Verſuchen korrigiren, und die Vorrichtung in der gehörigen Lage befeſtigen muß. Iſt man damit fertig, ſo kann man Fig. 117 die Schrauben d, d, los machen, und das Fernrohr in der Hülſe herumdrehen, bis eine von den Kreuzlinien den Faden des freyhangenden Lothes deckt, ſo hat die Röhre in der Hülſe ebenfalls ihre gehörige Lage.

45. Satz. Aufgabe.

§. 195. Wenn man eine Weite AB Fig. 121 nicht unmittelbar mit der Kette meſſen, aber doch von einem gewiſſen Punkt

C, deſſen beyde Endpunkte A, B nicht nur ſehen, ſondern auch zu ihnen frey hinkommen kann, den Abſtand AB, ohne Werkzeuge, Ketten und Stäbe ausgenommen, zu finden.

Auflöſung. Man ſtecke in C einen Stab, man meſſe CA, CB mit der Kette, und trage jede in ihrer Verlängerung ruckwärts, das iſt, man mache Cb = CB und Ca = CA, ſo wird ſich von b nach a eine Linie ausſtecken und meſſen laſſen, und es wird ba = BA ſeyn.

Beweis. ACB = aCb §. 35 bC = BC, AC = aC; alſo △ ACB = △ aCb §. 25, und AB = ab.

§. 196. Zuſatz. Kann man die Linien CA, CB nicht ganz wegen Hinderniſſen zurück tragen, ſo nehme man von jeder einen gleichvielten Theil z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ꝛc., und trage ſie rückwärts bis in m und n, ſo wird mn

der

der eben ſo vielſte Theil von AB ſeyn, als Cm von CB oder Cn von AC iſt. §. 128.

§. 197. Anmerkung. Daß man bey dem Verfahren des vorhergehenden §s ſehr genau zu Werke gehen müße, erhellet daraus, weil man mn etlichemal nehmen muß, um AB zu erhalten. Dadurch vervielfältiget ſich alſo der Fehler, welches bey dem erſten Verfahren §. 195 nicht geſchieht.

46. Satz. Aufgabe.

§ 198. Wenn man nur zu einem Endpunkt B einer Linie AB Fig. 122 hinkommen kann, die Weite AB vermöge der Kette und Stäbe zu finden.

Auflöſung. Man verlängere AB bis in D. Man meſſe BC, DC, und trage ſie in ihren Verlängerungen rückwärts, oder mache Cd=CD, CB=Cb. In d und b ſetze man Stäbe und verlängere die Linie db bis

in

in a, wo a, C, A ins Gerade liegen, und meſſe ab, ſo wird ab = AB ſeyn.

Beweis. △ BCD = △ bCd §. 25, denn BCD = bCd §. 35 und BC = bC CD = Cd. Alſo Cbd = CBD, und CBA = Cba §. 30. Ferner ACB = aCb §. 35, und BC = bC; folglich △ ACB = △ aCb §. 27, und AB = ab.

§. 199. Zuſatz. Trägt man aus C nur proportionale Theile von CB, CD in p und m zurück, ſo wird △ pCm ∽ △ CBD, alſo auch die Dreyecke ACB, mCn einander ähnlich; folglich mn der eben ſo vielte Theil von AB, als Cm von CB. Wo aber die Bemerkung §. 197 ebenfalls gilt.

47. Satz. Aufgabe.

§. 200. Wenn man nichts als Ketten und Stäbe brauchen will, eine Weite AB zu finden Fig. 123, wo man von C zwar ihre Endpunkte A, und B ſehen, aber nicht zu denſelben kommen kann.

Auf-

Auflöſung. Man ſtecke in C einen Stab vertikal, und verlängere CA ſowohl als CB auf eine beträchtliche Weite rückwärts bis in D und E. Man ſtecke von E nach A, und von D nach B die geraden Linien EA, DB aus. Man nehme in AE einen Punkt F an, und ſtecke in G einen Stab, der mit F und C ins Gerade liegt. Endlich meſſe man die Linien EF, FC, CE, ED, DC, CG, ſo läßt ſich vermittelſt eines verjüngten Maaßſtabes eine Figur eabd Fig. 123 entwerfen, die mit jener auf dem Felde ähnlich iſt, und worinn ab eben ſo viele verjüngte als AB auf dem Felde Kettenfuße, haben wird.

Beweis. Ich ſetze voraus, daß man ſich bey der Meſſung ein Brouillon gemacht, und die auf dem Felde gemeſſenen Linien gehörig in demſelben angemerkt habe. Fig. 123 ſtelle zugleich dieſes Brouillon vor. Macht man ein △ efc Fig. 123 wo ef, fc, ce eben ſo viele verjüngte Fuße haben, als für EF, FC, CE in dem Brouillon angemerkt ſind, ſo

ſo wird $\triangle$ efc dem $\triangle$ EFC ähnlich ſeyn §. 127. Macht man auf die nämliche Art $\triangle$ ecd mit $\triangle$ ECD ähnlich, und giebt endlich cg ſo viele verjüngte Fuße, als CG Kettenfuße hatte, ſo wird auch $\triangle$ CGE ähnlich ſeyn §. 128. Verlängert man ſodann ef, dc und ec, dg bis ſie in a und b zuſammen ſtoſſen, ſo wird ab auf dem verjüngten Maaßſtabe ſo viele Füße halten, als AB auf dem Felde Kettenfüße. Denn CED + CEF = ced + cef, und CDE = cde durch die Zeichnung der ähnlichen Dreyecke, alſo iſt $\triangle$ EAD ∽ $\triangle$ ead §. 123; ferner weil EDC + CDG = edc + cdg und CED = ced iſt, ſo muß auch $\triangle$ EBD ∽ $\triangle$ ebd ſeyn. Alſo iſt wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke EAD, ead, dann EBD, ebd

$$ED : ed = EA : ea$$
$$ED : ed = EB : eb.$$

Folglich EA : ea = EB : eb, oder EA : EB = ea : eb. §. 160 Arithm. Da nun AEB = aeb durch die Zeichnung wird, ſo ſind auch die $\triangle\triangle$ AEB, aeb ähnlich §. 128. Daher

AE :

AE : ae = AB : ab aber AE : ae = ED : ed alſo auch AB : ab = ED : ed. Das iſt: weil ed ſo viele verjüngte, als ED Kettenfüße hat; ſo muß auch ab ſo viele verjüngte Fuße haben, als AB Kettenfüße. Man darf daher Fig. 123 ab nur auf dem Maaßſtabe, nach welchen die Figur gezeichnet iſt, meſſen, um AB zu finden.

§ 101. Anmerkung. Anſtatt zu ſagen, ab habe ſo viele verjüngte Ruthen, Fuße ꝛc. als AB wirkliche Ruthen und Kettenfüße, will ich hinfür der Kürze halber mit Hrn. Hofr. Kästner, ab der AB gemäß nennen.

48. Satz. Aufgabe.

§. 202. Die Aufgabe §. 195 durch Hülfe des Meßtiſches aufzulöſen.

Auflöſung. Man bringe den Tiſch über den Standpunkt C Fig. 124, woraus man beyde Endpunkte der Weite AB ſehen kann,

und mache ihn horizontal. Man ſtecke in einem ſchicklichen Punkt c auf dem Tiſche eine feine Nadel ohngefähr ſenkrecht ein. Man lege an dieſelbe das Diopternlineal, oder jenes mit dem Fernrohr, viſire aus C nach A und B, und ziehe an der Schärfe des Lineals auf dem Tiſche die Linien cm, cn. Man beſtimme vermittelſt der Gabel Fig. 122 den unter c lothrecht liegenden Punkt C, und meſſe nach A und B. Macht man ſodann ca, cb den Linien CA, CB gemäß, ſo wird auch ab der AB gemäß ſeyn.

Beweis. ACB = acb §. 180, und AC: BC = ac: bc alſo △ ACB ∽ △ acb §. 128, und AC : ac = AB : ab.

49. Satz. Aufgabe.

§. 203. Die Aufgabe §. 198 durch Hülfe des Meßtiſches aufzulöſen.

Auflöſung. Man ſtelle den Meßtiſch über den Standpunkt C Fig. 125, und mache

che ihn horizontal. Man wähle einen ſchicklichen Punkt c auf dem Tiſche, ſtecke eine feine Nadel ſenkrecht in c ein, lege das Lineal an, viſire nach A, B und einem dritten Punkt D, den man durch eine Fahne oder Abſteckſtab bezeichnen kann. Man laſſe irgendwo in der Linie BD z. B. in E durch einen Gehülfen noch einen Stab ſtecken, und viſire auch nach demſelben. Man beſtimme den Punkt C der lothrecht unter c liegt, mit der Gabel, meſſe die Linien CD, CE, CA und mache denſelben die Linien cd, ce, ca auf dem Tiſche gemäß, ſo werden ſich de und die Linie, welche nach B hingezogen worden iſt, gehörig verlängert, irgendwo in b ſchneiden und ba der AB gemäß ſeyn.

Beweis. ECD = ecd und CE : CD = ce : cd durch die Art des Verfahrens alſo △ECD ∽ △ecd §. 128, und CDE = cde. Ferner BCD = bcd, daher auch △BCD ∽ △bcd §. 123, folglich cd : CD = cb : CB aber auch cd : CD = ca : CA weil ca der

CA gemäß gemacht worden iſt, alſo cb : CB = ca : CA oder cb : ca = CB : CA §. 160. Arithm. und acb = ACB; folglich △ ACB ∽ △ acb §. 128. und ca : CA = ab : AB, das iſt, ab der AB wie ca der CA gemäß.

50. Satz. Aufgabe.

§. 204. Wenn man zu gar keinen Endpunkt der Weite AB Fig. 126 kommen, wohl aber dahin ſehen kann, durch Hülfe des Meßtiſches die Weite AB zu finden.

Auflöſung. Man nehme eine in Ruckſicht von BA nicht zu kleine Standlinie CD an, aus deren Endpunkten C und D man nach A und B ſehen kann. Läßt ſich überdieß CD mit der Kette bequem meſſen, ſo iſt es deſto beſſer. Der erſte Stand ſey in C. Man laſſe in D eine Fahne ſenkrecht ſtecken, und ſtelle den Tiſch über C, mache ihn horizontal, viſire aus einem ſchicklichen Punkt c deſſelben nach dem zweyten Stand D ſowohl

als A und B, und ziehe auf dem Tiſche an der Schärfe des Lineals die Linien cr, cm, cn. Von dem Punkte C der lothrecht unter c liegt, meſſe man bis nach D, und mache auf dem Tiſche cd der Standlinie gemäß. Iſt dieſes geſchehen, ſo gehe man mit dem Meßtiſche nach D, laſſe in C eine Fahne zurück, nehme die Meßfahne in D weg, und mache daß bey horizontalem Tiſche d lothrecht über D und dc genau in der Vertikalebene durch beyde Stände C und D zu liegen komme. §. 182. In dieſer Lage laſſe man den Tiſch unverrückt, lege das Lineal an d, viſire nach A und B, und ziehe an der Schäfe des Lineals Linien, welche die vorigen im erſten Stande nach eben dieſen Gegenſtänden gezogenen cm, cn in a und b ſchneiden werden: ſo wird ab der AB gemäß ſeyn.

Beweis. Wenn gehörig nach der Auflöſung verfahren worden iſt, ſo iſt mcd = ACD und adc=ADC, §. 180. Alſo

△

$\triangle$ ACD ∽ $\triangle$ acd §. 123. Eben ſo iſt ncd = BCD, und cdb = CDB; folglich auch das $\triangle$ CBD ∽ $\triangle$ cbd §. 123; daher CD : cd = CA : ca und CD : cd = CB : cb. Daraus wird CA : ca = CB : cb oder CA : CB = ca : cb, und wegen mcn = ACB auch das $\triangle$ ACB ∽ $\triangle$ acb § 128; folglich CA : ca = AB : ab. Oben war CA : ca = CD : cd oder ab der AB, ſo wie cd der CD gemäß.

§. 205. Die Richtigkeit des Verfahrens in der vorhergehenden Aufgabe hängt außer der Güte der Werkzeuge davon ab, daß man die Tiſchplatte ſo genau als möglich horizontal gemacht, vorzüglich aber, daß man den Tiſch während dem man die Linien auf demſelben zieht, in unverrückter Stellung erhalten, den Punkt d lothrecht über D, und dc längſt DC eingerichtet habe, weil die Aehnlichkeit der in dem Beweiſe genannten Dreyecke hierauf beruht. Denn es liege z. B. d zwar in der Vertikalebene der Standlinie CD, aber nicht über D Fig. 127. x

ſey

ſey der Punkt, welcher auf dem Tiſche loth- recht über D liegt, ſo iſt adc > pxc §. 45 = ADC §. 180; folglich das △ adc nicht ähnlich mit ADC. Liegt aber dc nicht längſt der Standlinie DC, wie Fig. 127, ſondern z. B. in der Vertikalfläche durch DB, und K ſenkrecht unter d. Fig. 128; ſo iſt bdc = BKC > CDB §. 45; alſo △ cdb mit △ CDB nicht ähnlich. Läge der zweyte Stand- punkt in D′ ſenkrecht unter dem Punkt y des Tiſches, ſo iſt cdb = BKC = BDC + KCD und CD′B = CDB + D′BD wenn daher cdb = CD′B ſeyn ſoll, ſo muß KCD = D′BD ſeyn. Fällt D′ ſenkrecht unter d in K, ſo iſt KCD = D′BD = 0; alſo in die- ſem Falle, cdb = CD′B.

§. 206. Die Aufgabe §. 204 kann man brauchen um ganze Figuren aus einer Stand- linie in Grund zu legen. Es ſey Fig. 129, in F der erſte, in G der zweyte Stand, alſo die Standlinie, FG. Verfährt man wie bey der Aufgabe §. 204, nur daß man in bey-

den Ständen nach allen Ecken der Figur viſirt, und an der Schärfe des Lineals die Richtungslinien zieht, ſo werden die nach einerley Gegenſtande in beyden Ständen gezogenen Linien auf dem Tiſche in a, b, c, d, e ſich ſchneiden, und wenn die Durchſchnittspunkte durch gerade Linien zuſammgezogen werden, eine Figur abcde geben, die mit derſelben auf dem Felde oder ABCDE ähnlich iſt. Fallen die Punkte A, B, C, D, E nicht deutlich in die Augen, wenn man aus den Ständen F und G nach denſelben ſieht, ſo muß man entweder über jeden Abſteckſtäbe oder Stangen vertikal einſetzen, oder einen Gehülfen mit einer Meßfahne an dem Umfange herum gehen, und die Meßfahne in A, B, C, D, E vertikal über die beſagte Punkte halten laſſen, bis man die Viſirlinie gezogen hat. Denn BFG = bfg und bgf = BGF alſo $\triangle$ BFG ∽ $\triangle$ bfg §. 123. Aus eben ſolchen Gründen iſt $\triangle$ FGA ∽ fga, alſo FG : fg = BG : bg = AG : ag. Und bgf + fga = BGF + FGA; folglich

$\triangle$

$\triangle$ BGA $\backsim$ $\triangle$ bga §. 128. Weil die $\triangle\triangle$ FDG, FEG mit den $\triangle\triangle$ fdg, feg ähnlich ſind wegen den gleichen Winkeln an den Linien FG, fg; ſo wird FG : fg = GD : gd = GE : ge, und wegen dge = DGE, auch $\triangle$ DGE $\backsim$ $\triangle$ dge §. 128. Die Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ bcg, cdg, eag mit den $\triangle\triangle$ BCG, CDG, EAG läßt ſich auf eine ähnliche Art, wie jene der $\triangle\triangle$ ACB, acb, §. 204 erweiſen. Daher ſind in den Figuren abcde, ABCDE die $\triangle\triangle$ gab, gbc, gcd, gde, gea den $\triangle\triangle$ GAB, GBC, GCD, GDE, GEA ähnlich, alſo die ganzen Figuren ſelbſt. Denn wegen der Aehnlichkeit dieſer Dreyecke iſt FG : fg = AB : ab = BG : bg = BC : bc = CG : cg = CD : cd = DG : dg = DE : de &c. oder alle Seiten der groſſen Figur mit den Seiten der kleinern proportional. Ferner abc = abg + gbc = ABG + GBC = ABC und bcd = bcg + gcd = BCG + GCD = BCD &c. alſo die Figuren ähnlich, §. 21.

51. Saz.

51. Satz. Aufgabe.

§. 207. Man kennt die Lage dreyer Objekte A, B, C Fig. 131 gegen einander, und auch die Winkel ADB, BDC Fig. 130, unter welchen ſie in einem vierten Ort D geſehen werden. Man ſoll nun finden, wie weit der vierte Ort von jedem der drey Objekte A, B, C entfernt iſt.

Aufloͤſung. Ich ſetze voraus, daß man die Winkel ADB, BDC durch Boͤgen beſtimmt, und daß man das Dreyeck ABC, welches die drey Entfernungen der Objekte geben, nach einem verjuͤngten Maaßſtabe, den Entfernungen gemaͤß, gezeichnet habe. Man ſetze DT Fig. 130 ſenkrecht auf AD. Man ziehe mit einem nicht zu kleinen Radius den Bogen ACT, und mache uͤber den Endpunkten A, C der Seite AC Fig. 131 des △ ABC, welches die Entfernungen der drey Objekte im verjuͤngten Maaße darſtellt, die Winkel WAC=UCA=CDT von Fig. 130. Aus X, wo ſich die Linien AW, CN ſchneiden,

als

als Mittelpunkt beſchreibe man mit XA = XC den Kreis ANCYA. Ferner mache man einen Winkel AXQ an X, der doppelt ſo groß als ADB von Fig. 130 ſey, und bemerke den Punkt N, wo XQ den Kreis ſchneidet. Durch B und N ziehe man eine gerade Linie, und verlängere ſie bis an die Peripherie in Y. Endlich ziehe man noch die Linien YA, YC; ſo wird Y die Lage des vierten Orts gegen die drey Objekte A, B, C, und YA, YB, YC die verlangten Entfernungen deſſelben von den drey Objekten angeben.

Beweis. Es ſey XZ ſenkrecht auf die Corde AC; ſo iſt AXZ = R — XAZ §. 77 Fig. 131, = R — CDT = ADC Fig. 130. Alſo ADC Fig. 130, = Fig. 131, $AXZ = \frac{AXC}{2}$, §. 96, = AYC, §. 101. Weil durch die Zeichnung ADB, Fig. 130, $= \frac{NXA}{2}$ = NYA, Fig. 131. §. 101; ſo muß

NXC

$\frac{NXC}{2}$ = NYC, §. 101, Fig. 131, = BDC, Fig. 130, ſeyn. Die Linie, in deren Richtung man das Objekt B geſehen hat, geht offenbar durch B; allein ſie muß ebenfalls durch N gehen, weil ſonſt der dem Peripherialwinkel AYB, Fig. 131, zugehörige Centralwinkel größer oder kleiner als 2 ADB, Fig. 130, ſeyn würde: folglich liegt Y mit N und B ins Gerade, und zwar dort wo die verlängerte BN die Peribherie ſchneidet.

§. 208. Wenn ADC, Fig. 130, + ABC, Fig. 131, = 2 R ſind, ſo liegen die vier Punkte A, B, C, Y in einem Kreiſe, § 104. Folglich fallen in dieſem Falle die Punkte B, N in einen zuſammen, und die Aufgabe läßt ſich aus den gegebenen Dingen allein nicht auflöſen. Daß ein ſolcher Fall äußerſt ſelten ſey, ſieht man leicht ein.

§. 209. Zuſatz. Wenn ADC = R, Fig. 130, ſo wird AC, Fig. 131, der Dia-

meter des zu beſchreibenden Kreiſes, §. 103, und man kann ihn mit $\frac{AC}{2}$ beſchreiben.

§. 110. Zuſatz. Wenn ADC, Fig. 130, ſtumpf iſt, ſo fällt das Centrum X, Fig. 131, auf die entgegengeſetzte Seite von AC, und man macht ſodann an die Endpunkte A, C auf der gegenüberſtehenden Seite von AC zween Winkel, jeden = ADC — R.

52. Satz. Aufgabe.

§. 211. Eine geradlinichte Figur ABCDE bloß mit der Kette auszumeſſen und zu entwerfen, Fig. 132.

Aufloͤſung. Man mache ſich von der Figur ein Brouillon oder einen ohngefähren Entwurf aus freyer Hand, nach dem Augenmaaße, abcde. Man meſſe alle Linien AB, BC, CD, DE, AE am Umfange, wie ſie der Ordnung nach einander folgen, mit der Kette,

und

und ſchreibe die gefundene Anzahl Ruthen, und Fuße auf die korreſpondirenden Linien des Brouillons. Man ziehe an einem Punkt a des Brouillons die Diagonalen ac, ad, man meſſe die korreſpondirenden Linien AC, AD auf dem Felde, und trage die Anzahl Fuße, wie zuvor in dem Brouillon ein, ſo wird ſich eine ähnliche Figur mit jener auf dem Felde entwerfen laſſen. Denn, da man auf dieſe Art in den △△ abc, acd, ade, bey jedem alle drey Seiten kennt, ſo kann man nach einem verjüngten Maaßſtabe kleinere Dreyecke deren Seiten den Seiten der größern Dreyecke auf dem Felde gemäß ſind, in eben der Ordnung, als ſie auf dem Felde liegen, und in dem Brouillon angezeigt ſind, zeichnen, und aneinander ſetzen, §. 156.

§. 212. Zuſatz. Man kann auch in der Figur ſelbſt, Fig. 133, einen Punkt F annehmen, aus F die Figur ABCDE in Dreyecke zerlegen, und von jedem die drey Seiten meſſen.

§. 213.

§. 213. Anmerkung. Daß man dieſe Art eine Figur in Grund zu legen nicht brauchen könne, wenn man nur an dem Umfange, wie z. B. bey Wäldern, herumkommen, die Diagonalen aber weder überſehen, noch unmittelbar mit der Kette meſſen kann, ſieht man von ſelbſt ein. Die Aufgabe dient eigentlich, kleine Stücke als Aecker, Wieſen ꝛc. auszumeſſen, wenn das Terrein ſo ziemlich eben iſt.

§. 214. Iſt die Figur ſehr irregulär, und von vielen Seiten, ſo umſchließt man ſie oft vortheilhaft mit einem Vieleck von wenigeren Seiten, wie z. B. Fig. 134, und ſucht die Eckpunkte durch Hülfe der Ordinaten und Abciſſen zu beſtimmen, wovon das Verfahren §. 173 gelehrt worden iſt. Dieſes dürfte bisweilen mit Vortheile am Umfange einer Waldung benützt werden können. Wenn z. B. Fig. 135 abcdefghk einen Theil von dem Umfange einer Waldung vorſtellt; ziehe man eine gerade Linie Mn ſo

nahe

nahe an den Wald als möglich, und beſtimme die Punkte a, b, c, d &c. durch Abciſſen und Ordinaten.

53. Satz. Aufgabe.

§. 215. Durch Hülfe des Meßtiſches eine Figur ABCDE aus einem Standpunkt A in den Grund zu legen, Fig. 136.

Auflöſung. Man ſtelle den Tiſch gehörig über A, ſuche den Punkt a, welcher lothrecht über A liegt, und viſire aus a nach allen Eckpunkten der Figur. Läßt man die Linien AB, AC, AD, AE mit der Kette meſſen, und trägt ſie aus a im verjüngten Maaße auf die korreſpondirenden Viſirlinien nach B, C, D, E, in b, c, d, e; ſo können die Punkte abcdea zuſammengezogen werden, und es wird die Figur abcde auf dem Tiſche mit der ABCDE auf dem Felde ähnlich ſeyn.

Beweis. bac = BAC, §. 180, und weil ba, ca den BA, CA gemäß ſind, ab : ac

=

= AB : AC alſo △abc ∽ △ABC. Eben dieſes gilt von △△ cad, CAD, dann DAE, dae; daher ſind die Figuren ähnlich. §. 101.

§. 216. Zuſatz. Man kann den Meßtiſch auch über einen Punkt F Fig. 137 innerhalb der Figur ſtellen, nach allen Eckpunkten A, B, C, D, E der Figur aus einem lothrecht über F liegenden Punkt f des Tiſches Richtungslinien ziehen, und die Linien fa, fb, fc, fd, fe den Linien FA, FB, FC, FD, FE gemäß machen. Werden die Punkte a, b, c, d, e durch gerade Linien zuſammengezogen, ſo wird die Figur abcde mit der ABCDE ähnlich ſeyn, §§. 202. 136. Uebrigens ſieht man, daß hier mehr Linien gemeſſen werden müßen, als wenn man den Tiſch, wie Fig. 136, ſelbſt über einen Eckpunkt aufgeſtellt hätte. Allein da etwa in manchen Fällen die Diagonalen ſehr lang und unbequem zum Meſſen ausfallen dürften, ſo wird man oft den Standpunkt innerhalb der Figur ſelbſt mit Vortheil wählen können.

§. 217. Zuſatz. Wäre Fig. 136 z. B. die Diagonal AC ſehr unbequem wegen vorhandenen Hinderniſſen zu meſſen, ſo könnte man ſtatt derſelben auch CD meſſen, und mit einer Linie cd, die der CD gemäß iſt, aus d die Richtungslinie von a nach C durchſchneiden. Weil es aber zween Durchſchnittspunkte geben kann, ſo muß man wiſſen, ob der Winkel bey C ſtumpf oder ſpitzig iſt, welches leicht durch den Augenſchein ſelbſt erkannt wird.

54. Satz. Aufgabe.

§. 218. Eine Figur z. B. einen Wald durch Hülfe des Meßtiſches aus dem Umfange zu meſſen. Fig 138.

Auflöſung. I. Man ſtelle den Tiſch horizontal über einen Winkelpunkt A, und beſtimme den lothrecht über A liegenden Punkt a. Man lege das Lineal an a, viſire nach B und E, und ziehe auf dem Tiſche die Richtungslinien am, aq Endlich meſſe man nach B und mache ab der AB gemäß. II.

II. In A laſſe man eine Meßfahne zurück, und gehe nach B. Stellt man den Tiſch ſo über B, daß, wenn er horizontal gemacht worden iſt, b lothrecht über B, und ba längſt BA zu liegen kommt, §. 180, ſo kann man an b anlegen, nach C viſiren, und bn ziehen. Endlich meſſe man BC, trage ſie aus b in c im verjüngten Maaße, und verfahre eben ſo wie bey B in allen folgenden Punkten C, D &c. bis man am Ende iſt, und die Figur ſich ſchließt.

§. 219. Anmerkung. Obſchon dieſes Verfahren völlig in der Theorie gegründet iſt, ſo wird es doch ſelten oder niemal geſchehen, daß ſich die Figur zuletzt gehörig ſchließe. Hätte man durchaus genau verfahren, ſo würde zuletzt de die in dem erſten Standorte A nach E gezogene Linie dq ſo ſchneiden, daß de der DE und ae der AE gemäß wäre. Aber wenn man von D nach E mit der Kette hinmißt, ſo wird man ſehen, daß dieſes nicht geſchieht, daß alſo ein oder

mehrere Fehler in der M.ſſung begangen worden ſind. Man ſetze di wäre der DE gemäß. Man bringe den Meßtiſch über E, ſo, daß i lothrecht über E zu liegen komme, und id längſt ED eingerichtet ſey, ſo wird man auch nach dieſer Korrektion und in dieſer Stellung des Tiſches finden, daß ia nicht längſt EA falle, und dieſes um ſo weniger, je beträchtlicher die begangenen Fehler ſind. Aber man kann da nicht aus Unwiſſenheit, und Unachtſamkeit allein Fehler begehen, ſondern wenn der Seiten und Wendungen viele ſind, ſo können ſich bey aller gehörigen Aufmerkſamkeit mehrere obſchon kleine F.hler ſo anhäufen, daß ihr Einfluß zuletzt bey dem Schluſſe der Figur ſehr beträchtlich ſeyn dürfte. Das Schlimmſte z. B. bey Wäldern iſt, daß man meiſtens nur von einem Markſtein bis zum andern ſehen kann. Denn ſonſt könnte man nachdem man den Tiſch über C gehörig geſtellt hat, das Lineal längſt ca anlegen, und ſehen, ob wohl A ſich in dieſer Verlängerung befinde, wie es ſeyn muß, wenn

keine

keine Fehler vorgefallen ſind. Eben ſo würde man in D nach gehöriger Stellung des Tiſches längſt db, da anlegen, und ſehen können, ob B und A ſich in den Richtungslinien db, da befinden. Geſchieht dieſes nicht, ſo iſt es ein ſicheres Zeichen, daß man irgendwo gefehlt habe. Dieß würde dienen beträchtlichere Fehler bey Zeiten zu entdecken, und bey jeder Station die ſchon gemachte Arbeit zu prüfen. Allein bey Waldungen, wo dieſes wegen der Undurchſichtigkeit derſelben nicht angeht, wird man erſt zuletzt beym Schluſſe gewahr, ob man gefehlt habe, ohne zu wiſſen, ob bey einer oder mehrern Stationen, und bey welcher eigentlich gefehlt worden ſey, oder ob man, bey ſehr vielen Wendungen, die Unrichtigkeit im Schluſſe bloß dem Einfluß von der Menge aller kleinen faſt unvermeidlichen Fehler zuzuſchreiben habe. Wenn daher an einem Theil des Umfanges einer Waldung viele beſonders kleinere Wendungen ſind, wie Fig. 135, ſo wird man wohl thun, wenn man ſich des §. 173 gelehrten

Ver-

Verfahrens bedient, um die Eckpunkte gehörig in den Grund zu legen.

55. Satz. Aufgabe.

§. 220. Einen Theil z. B. von dem Umfange eines Waldes durch Hülfe des Meßtiſches zu entwerfen, ohne daß es, wie §. 218, nöthig wäre alle Seiten zu meſſen.

Aufloͤſung. I. Man wähle ſich eine Standlinie, an dem Umfange der Figur z. B. CD Fig. 139, und ſuche aus derſelben etliche Punkte M, N, P die ich Richtpunkte nennen will, nach §. 204 ſo genau auf dem Tiſche zu beſtimmen, als möglich iſt. Sind nicht ſchon von ſelbſt einige dergleichen Richtpunkte vorhanden, ſo kann man ſich dieſelben durch aufgerichtete Stangen oder andere Zeichen, die man in der Ferne aus den Punkten A, B, E, F &c. des Umfangs ſehen kann, verſchaffen. Außerdem daß man die Richtpunkte M, N, P aus den Ecken des Umfanges, die man vermittelſt derſelben in den Grund legen

gen will, ſehen muß könnnen, ſo ſollen ſie gegen die Standlinie, eine ſchickliche Lage haben, um von ihrer Beſtimmung auf dem Tiſche deſto verſicherter zu ſeyn. Zu dieſem Ende ſollten die Dreyecke DMC, DNC, DPC keine zu ſpitzige oder ſtumpfe Winkel haben.

Hat man die Punkte M, N, P ſammt der Standlinie CD gehörig in den Grund gelegt, und in beyden Ständen nach den nächſten Eckpunkten die Richtungslinien cB', dE' Fig. 140 gezogen, ſo II. verfügt man ſich mit dem Meßtiſch nach B oder E Fig. 139 z. B. nach E, ſtellt ihn über E, macht ihn horizontal, und richtet die Richtungslinie dE' genau längſt ED ein.

In dieſer Stellung des Tiſches legt man das Lineal an m, viſirt nach M, und zieht an der Schärfe des Lineals die Linie rückwärts, bis ſie E'd irgendwo in e ſchneidet, ſo wird ed der ED gemäß ſeyn. Legt man

das

das Lineal noch auch an n, und viſirt nach N, ſo ſoll die rückwärts verlängerte Linie in E'd den nämlichen Punkt e abſchneiden, wenn die Punkte M, N genau auf dem Tiſche feſtgelegt ſind, und nirgend kein Verſehen geſchehen iſt. Man ſieht hier eine Urſache, warum man mehrere Richtpunkte auf dem Tiſche zu beſtimmen verlangt. Denn, außerdem daß es möglich iſt, daß man etwa aus einem oder anderm Eckpunkt der Figur dieſen oder jenen Richtpunkt nicht ſehen, oder auch einer und der andere Richtpunkt vielleicht eine ſolche Lage haben kann, daß die rückwärts an der Schärfe des Lineals gezogenen Linien mit derjenigen, in welcher ſie den Standpunkt auf dem Tiſche abſchneiden ſollen, zu ſpitzige Winkel, und dadurch den Ort des Durchſchnittes ungewiß machen, ſo dienen mehrere ſich von der Beſtimmung des Standpunktes auf dem Tiſche zu verſichern. Denn wenn alle Richtpunkte einerley Durchſchnitt e geben, ſo darf man an der richtigen Beſtimmung des Punktes e nicht zweifeln.

feln. Geben verſchiedene Richtpunkte, verſchiedene Durchſchnitte, ſo kann man einen mittleren annehmen, und denſelben als den wahren gelten laſſen, und dadurch ſich der Wahrheit einigermaſſen nähern. Das Meiſte kommt hiebey auf eine genau und richtige Beſtimmung der Richtpunkte auf dem Tiſche an, wenn man erwarten will, daß in verſchiedenen Standpunkten, verſchiedene Richtpunkte einerley Durchſchnitte geben ſollen.

III. Iſt nun der Punkt e gehörig auf dem Tiſche beſtimmt, ſo zieht man aus demſelben eine Richtungs- oder Viſirlinie ef nach dem nächſten Eckpunkt f, begiebt ſich mit dem Meßtiſche nach f, und verfährt dort auf die nämliche Art, wie in E, um den Punkt F auf dem Tiſche feſtzulegen, und eine Linie zu erhalten, die der EF gemäß iſt.

Beweis. Wenn die Punkte M, N, P gehörig aus der Standlinie CD feſtgelegt

ſind,

ſind, ſo muß $\triangle MDC \backsim \triangle mdc$ ſeyn, und daher $dc : DC = dm : DM$. Liegt ed genau längſt ED, ſo iſt $edm = EDM$, und $med = MED$. Alſo $\triangle med \backsim \triangle MED$ §. 123. Folglich $md : MD = ed : ED$. Daher wird $dm : DM = dc : DC = ed : ED$. Oder ed der ED eben ſo, wie cd der CD gemäß ſeyn.

§. 121. Anmerkung. Das Verfahren von §. 220 empfiehlt ſich beſonders, wenn der Umfang z. B. einer Stadt in Grund gelegt werden ſoll, wo man um und um mehrere merkliche Punkte als Spitzen von Thürmen ꝛc. innerhalb des Umfanges der Figur wahrnehmen, und als Richtpunkte annehmen kann. Bey Wäldern, wenn ſich Richtpunkte von außem um dieſelbe darbieten, oder künſtliche geſchaffen werden können, läßt ſich dieſe Art beſonders dann mit Vortheil gebrauchen, wenn wegen Hinderniſſen die unmittelbare Meſſung der Seiten des Umfanges wo nicht unmöglich doch äußerſt beſchwerlich iſt, wie es

ge-

geſchieht, wenn das Terrein am Umfange moräſtig, ſehr uneben ꝛc. iſt.

§. 222. Zuſatz. Kann man ſich mit ein paar Gegenſtänden z. B. Fig. 141 den Spitzen zweer Thürme x und y in eine gerade Linie ſetzen, und aus zween Standpunkten A, B in der Verlängerung von xy mehrere Punkte M, N, P &c. nach §. 204 feſtlegen, ſo kann man in eben derſelben Verlängerung mit dem Meßtiſche z. B. bis C fortgehen, und eine neue Standlinie bc auf dem Tiſche der BC (eben wie Fig. 139 de der DE) gemäß abſchneiden, ohne ſie meſſen zu dürfen. Iſt c auf dem Tiſche beſtimmt, und ſind in B aus b nach neuen Gegenſtänden z. B. Q Viſirlinien, wie bq eine iſt, gezogen worden, ſo kann man dieſelbe in C durchſchneiden, und die Gegenſtände, nach welchen in B und C Richtungslinien gezogen worden ſind, auf dem Tiſche in Grund legen. Geht man von C nach einem vierten Punkt d, ſo kann man in D wieder eine

neue

neue Standlinie auf dem Tiſche abſchneiden, die der CD gemäß iſt, und aus derſelben neue Punkte feſtlegen. Selbſt neue Verlängerungen können auf dem Tiſche beſtimmt werden, wenn ſich einige, wie z. B. CU eine iſt, darbieten. Bieten ſich keine von ſelbſt dar, ſo kann man ſich dieſelben verſchaffen, wenn man Signale mit irgend einem Gegenſtand in gerader Linie errichtet.

223. Um die Grenzen, und den Flächeninhalt ſo genau als möglich zu erhalten, dürfte ohne Zweifel das Beſte ſeyn, wenn man durch den Wald gerade, und einander durchkreuzende Linien hauen läßt, dieſelben mit der Kette mißt, und ſich ſo vorläufig ein Gerippe formirt. Wenn die durchgehaeuen Linien Dreyecke formiren, ſo beſtimmt ſich das Gerippe durch die gemeſſenen Linien von ſelbſt. Man kann es alſo nach einem verjüngten Maaßſtabe zeichnen, und auf dem Tiſche tragen. Dasjenige, was von einem Punkte des Gerippes, wo die Linien in den Wald

hineingehen, bis zum nächſten Punkt im Umfange, wo eine Linie aus demſelben ſtreichet, enthalten iſt, könnte man ſodann nach einer der vorhergehenden Aufgaben mit dem Meßtiſche entwerfen, und ausfüllen. Da man auf dieſe Art richtig beſtimmte Punkte auf dem Tiſche erhält, ſo können die Fehler, die man bey der Meſſung mit dem Tiſche zwiſchen zween Punkten des Gerippes begehen möchte, auf die weitere Meſſung keinen Einfluß haben, man entdeckt ſie vielmehr bey dem nächſten Punkt des Gerippes, und kann ſie aufſuchen, und korrigiren. Auf welche Art vermittelſt eines Winkelmeſſers mehrere Punkte am Umfange eines Waldes und Linien um denſelben trigonometriſch beſtimmt werden könnten, um ſtatt des erwähnten Gerippes zu dienen, kann in dieſem Lehrbuche nicht gewieſen werden, weil es die Grenzen deſſelben nicht erlauben. Aber wenn und wo das Terrein nicht zu uneben iſt, wenn ſich die durchgehauenen Linien mit der Kette meſſen laſſen, ſo ſollte man ſich jederzeit ein ſolches Ge-

rippe

rippe vorläufig verſchaffen, wann es anderſt erlaubt iſt, Linien durch den Wald zu hauen. Da ohnehin Wege, oft Straſſen durch die Waldungen gehen, die man in dieſer Abſicht wenigſtens zum Theil benützen könnte, da dergleichen Linien nicht nur die Beſtimmung der Lage und Ausmeſſung von allen dem, was innerhalb des Umfanges von Holzwieſen, Aeckern, Weyern ꝛc. vorkömmt, wenn ſie die gehörige Lage haben, erleichteren, ſondern auch bey der wirklichen Eintheilung in ordentliche Schläge auf der Stelle ſelbſt mit Vortheil gebraucht werden, und überdieß als Holz- und Triſtwege ſtatt der vorigen dienen können, ſo ſehe ich nicht ein, was ſich mit Grunde dawider einwenden ließe. Wenigſtens dürfte der Einwurf, daß dadurch vieles beſonders junges Holz zu Schaden gehauen würde, nicht viel zu bedeuten haben. Erſt nachdem ein Wald richtig ausgemeſſen, in Grund gelegt, und alles was merkwürdiges darinn vorkömmt, gehörig beſchrieben worden iſt, läßt ſich an eine genaue

Beſtimmung ſtrittiger Grenzen, und ſeines Inhalts, an eine Eintheilung in Schläge und andere Anordnungen denken, welche die Grundſätze der Forſtwirthſchaft erheiſchen, um ſich von einem Walde den möglichſt größten andaurenden Nutzen zu verſchaffen. Allein bey dem Abſtecken gerader Linien, welche durch den Wald gehauen werden, muß man vorzüglich genau verfahren. Denn da die Wege, welche man der Linien wegen durchhaut, nicht gar breit werden dürfen, um das Holz zu ſchonen, ſo werden die überhangenden Aeſte von den Seiten, und oft auch die Ungleichheit des Terreins keine weite Ausſicht geſtatten. Man muß ſich daher meiſtens begnügen, einen dritten Stab mit zween vorhergehenden, die nicht weit voneinander in der Vertikalebene, die ausgeſteckt werden ſoll, entfernt ſind, ins Gerade zu bringen, und dieſe Arbeit ſo oft wiederholen, bis man durch den Wald hinauslanget. Daher hat man ſorgfältig zu verfahren, wenn man die Abſteckſtäbe, oder auch groſſe und

höhe-

höhere Stangen ſteckt, wenn man Abweichungen von der Vertikalfläche vermeiden will. Vielleicht könnte man ſich in ſolchen Fällen mit Vortheil einer Schnur bedienen. Denn legt man eine Schnur an die letzten zween Abſteckſtäbe, ſo wird ſich, wenn ſie um etwas beträchtliches länger, als die Entfernung der Stäbe iſt, am andern Ende derſelben vorwärts ein neuer Abſteckſtab oder Stange ſtecken laſſen. Sollte man dadurch den Ort für den folgenden Abſteckſtab auch nur ohngefähr finden, und berichtigen müßen, ſo könnte dieſes ſchon genug ſeyn, in Fällen, wo man wegen gehemmter Ausſicht und Schatten oft einen dem Scheine nach in der Vertikalebene liegenden Aſt oder Baumſtamm für die Abſteckſtange irrig anſehen könnte. Befinden ſich hohe Bäume in der Linie oder hart an derſelben in beträchtlichen Entfernungen von einander, ſo kann man dieſelben, wenn die Arbeit ſchon ziemlich weit gediehen iſt, des Nachts beſteigen, und wenn in der Verlängerung der Linie außer dem Walde

eine

eine Ausſicht dahin iſt, zugleich auf mehreren dergleichen Bäumen Feuer machen laſſen, um wahrzunehmen, ob ſie ins Gerade und in der Linie liegen oder nicht.

§. 224. Wenn von einer geraden Linie ein Punkt A dieſſeits, und ein anderer B jenſeits eines Waldes gegeben iſt Fig. 142, und man ſoll eine gerade Linie z. B. für eine Straſſe durch den Wald von A nach B angeben, ſo läßt ſich die Richtung dieſer Linie auf folgende Art beſtimmen. Man ſetze den Tiſch über C, und beſtimme auf demſelben nach §. 195 ein mit △ABC ähnliches kleineres Dreyeck abc; ſo hat man den Winkel bac = BAC. Geht man nach A, ſtellt man den Tiſch gehörig über A und ſo, daß a über A zu liegen komme, und ac längſt AC eingerichtet iſt, ſo wird ab auf dem Tiſche die Richtung anzeigen, in welcher AB liegt. Giebt es keinen Punkt C, wovon aus A und B geſehen werden könnte, ſo muß man durch ſo wenige Wendungen AM, MN, NB

als möglich iſt, von A nach B zu gelangen ſuchen, und die Figur AMNB in Grund legen, wo ſich ſodann bey A die Lage von AB gegen AM eben ſo, wie zuvor gegen AC wird angeben laſſen.

§. 225. Aus dem was bisher iſt gelehrt worden, wird man leicht einſehen, daß zu einer richtigen Meſſung mehrere als ganz gemeine Kenntniſſe erforderlich ſind, daß man ſeine Werkzeuge wohl kennen, und vor dem Gebrauche mit Aufmerkſamkeit prüfen ſolle, daß man vor der Meſſung das Terrein wohl recognoſciren, ſich etwa ein Brouillon oder ohngefähren Entwurf, wo nicht vom Ganzen, doch wenigſtens von einigen Theilen im voraus machen, mit einer und andern Anmerkung über das, was einem ſogleich auf der Stelle beyfällt, begleiten, und vor der wirklichen Meſſung alles wohl überlegen ſolle, auf welche Art und durch welche der hieher gehörigen Aufgaben nach den Lokalumſtänden zu urtheilen im Ganzen ſowohl als auch in den ein-

einzelnen Theilen hier oder dort die Ausmeſſung am richtigſten bewerkſtelliget werden könne. Wer ohne nöthige Kenntniſſe, ohne ſeine Werkzeuge, und ſeinen Gegenſtand zu kennen, ohne Ueberlegung ſogleich mit ſeinem Tiſchchen dahin läuft, und nach einer und derſelben Weiſe z. B. bey Wäldern nach §. 218 überall wegmißt, von dem läßt ſich wenigſtens nichts zuverläßiges und richtiges, das iſt, nichts brauchbares erwarten.

§. 226. Anmerkung. Da man z. B. den ganzen Umfang eines nur etwas beträchtlichen Waldes, niemals auf einen einzigen Ueberzug des Tiſches bringen wird, es wäre dann, daß man den verjüngten Maaßſtab auſſerordentlich klein, folglich zu klein annehmen wollte, ſo muß man, wenn ein Ueberzug des Meßtiſches voll gearbeitet iſt, die alte Arbeit mit der neuen zu verbinden wiſſen. Zu dieſem Ende trägt man von der ſchon fertigen Arbeit, eine ſogenannte Verbindungslinie z. B. die zuletzt gemeſſene Seite vom Umfan-

ge eines Waldes auf dem neuen Ueberzug, giebt ihr in Rückſicht der folgenden Meſſung eine ſchickliche Lage, und zieht dieſe Linie auf dem Meßtiſche ſo weit aus, als es angeht, um eine lange, gute Anlage für das Lineal zu erhalten. Wenn man den alten Ueberzug über den neuen bringt, ſo kann man die zween Endpunkte der Verbindungslinie, nachdem man ihr eine ſchickliche Lage gegeben, mit einer feinen Nadel durchſtechen, und ſodann auf dem neuen Ueberzuge durch eine gerade Linie zuſammenziehen, und gehörig verlängeren.

§. 227. Was das Ueberziehen des Meßtiſches betrift, ſo klebt man entweder mit Buchbinderkleiſter, oder Mundleim gutes Regalpapier an den Rand des Meßtiſches, und fährt mit einem naſſen Schwamme auf demſelben etlichemal auf und ab, ſo wird das Papier anziehen, unb ſich von ſelbſt wohl über der Ebene des Tiſches anſpannen. Wie alle einzelne Entwürfe oder Ueberzüge des

Tiſches zu Hauſe aufgetragen und miteinander verbunden werden ſollen, ertheilt Herr Profeſſor Meyer Seite 18 dritten Theil ſeines gründlichen Unterrichts zur praktiſchen Geometrie aus Penthers Praxis Geometriä §. 473 folgenden Unterricht.

„ Man laſſe ein recht glatt gehobeltes
„ Brett von Linden, oder andern weichem
„ Holze mit Leiſten einfaſſen, damit es ſich
„ nicht werfe, und von einer ſolchen Größe
„ verfertigen, daß alle einzelne Platten oder
„ Ueberzüge gehörig aneinander gefügt, nicht
„ nur vollkommen Raum darauf haben, ſon-
„ dern das Brett ſelbſt noch wenigſtens einen
„ halben Schuh an allen 4 Seiten über ſie
„ hinausreicht. Dieſes Brett überziehe man
„ mit einer dichten Leinwand, die ohne Kno-
„ ten iſt, und in Ermanglung zureichender
„ Größe, aus mehreren Stücken zart zu-
„ ſammgenähet ſeyn muß. Man bedient ſich
„ bloß eines gewöhnlichen Buchbinderklei-
„ ſters, womit man den Rand der Leinwand

„ ohn-

„ ohngefähr ein paar Zoll beſtreichet, und
„ ſie auf das Brett klebet, auch ſie dabey ſo
„ viel als möglich anzieht. So bald der Kleiſter
„ trocken geworden iſt, beſchneide man einige
„ Bögen des größten holländiſchen Papiers
„ an ihrem Rande, bekleiſtere ſie ganz auf
„ der einen Seite, und lege ſie mit dieſer
„ Seite auf die gleichfalls mit Kleiſter über-
„ zogene Leinwand, ſo daß jedes Blatt Pa-
„ pier das neben daran liegende ohngefähr
„ eines Strohhalms breit bedeckt, ziehe hier-
„ auf das Papier allerwärts auseinander, ſo
„ viel ſichs thun läßt, drücke es mit einem
„ zarten Tuche an, und verreibe die runzlichen
„ Stellen durch gelindes Reiben auf einem
„ andern trocknen darauf gelegten Papier,
„ bis der Ueberzug vollkommen trocken iſt,
„ glätte ihn endlich mit einem Falzbeine, der-
„ gleichen die Buchbinder haben, ſo wird er
„ wie ein ſauberes Pergament ausſehen, und
„ zum Auftragen der einzelnen Entwürfe zu-
„ bereitet ſeyn. Das Aufziehen und Zuſam-
„ menhängen der einzelnen Platten auf die-

„ ſen

„ ſer mit Papier überzogenen Leinwand ge-
„ ſchieht nun am kürzeſten und beſten auf fol-
„ gende Art.“

„ Erſtlich lege man die erſte Platte auf
„ die überzogene Leinwand, ſteche die merk-
„ würdigſten Punkte des Entwurfes mit ei-
„ ner feinen Kopirnadel durch, und zeichne
„ ihn hierauf mit Bleyſtift ins reine. An
„ dieſen durchgeſtochenen Entwurf lege man
„ die zwote daran zu liegen kommende Plat-
„ te dergeſtalt, daß die Verbindungslinien
„ oder ihre Endpunkte, wodurch beyde Ent-
„ würfe ihrer Lage auf dem Felde gemäß an-
„ einander gefügt werden ſollen, gerade über
„ dieſelben Punkte des bereits durchſtochenen
„ erſtern Entwurfs zu liegen kommen; ſchla-
„ ge durch die übereinander gelegten Punkte,
„ wie auch noch durch einige andere zarte
„ Stecknadeln an, damit die abzukopirende
„ Platte neben der bereits ins reine gebrach-
„ ten erſteren in unverrückter Lage erhalten
„ werde, ſteche nun vermittelſt der Kopirna-

„ del

„ del abermals die merkwürdigſten Punkte
„ der zwoten Platte durch, und hänge ſie
„ wieder ſowohl unter ſich, als auch mit
„ der Zeichnung der erſten Platte durch Bley=
„ ſtiftlinien bis zu weiterer Bearbeitung zu=
„ ſammen.“

„ Während des Durchſtechens ſelbſt muß
„ man die etwaigen kleinen Beulen auf dem
„ abzukopirenden Blatte, durch einen gelin=
„ den Druck oder Zug eben machen, und her=
„ nach beym Zuſammenziehen der durchſto=
„ chenen Punkte immer auf das Original
„ ſelbſt ſein Augenmerk richten, damit die
„ vielen Punkte keine Irrung verurſachen,
„ und indem man etwa einen für den andern
„ hielte, unrichtig zuſammen gehängt wer=
„ den. Durch einige Uebung wird man es
„ hierinn bald zu einer Fertigkeit bringen.
„ Sollten einige Punkte vergeſſen worden
„ ſeyn, ſo muß man ſie durch Durchſchnit=
„ te zweener Kreisbögen aus bereits durch=
„ geſtochenen Punkten beſtimmen.“

§. 228.

§. 228. Da die Ausarbeitung der Plane und das Zeichnen ungleich beſſer unter Anleitung eines Meiſters und durch Uebung ſelbſt, als viele Vorſchriften erlernt werden können, und bey der Schule ohnehin ein Zeichnungsmeiſter aufgeſtellt werden dürfte, ſo brauche ich gegenwärtiges Lehrbuch nicht mit einem Unterrichte zur Verfertigung und Ausarbeitung der Riſſe zu vergrößeren. Man ſehe hierüber Hrn. Prof. Meyer 22. Kapitel dritten Theil ſeines gründlichen Unterrichts. Der Güte und Kürze wegen empfehlen ſich hierinn vorzüglich Hrn. Prof. Keferſteins Anfangsgründe zu praktiſch-geometriſchen Zeichnungen.

§. 229. Ich habe bisher noch nichts von Höhenmeſſen beygebracht. Hr. Prof. Jung hat in ſeinem ſehr ſchön geſchriebenen Lehrbuche der Forſtwirthſchaft folgendes Inſtrument angegeben, welches die Höhen ſtehender Bäume zu meſſen dienen kann. Das Inſtrument iſt ſehr einfach. Es beſteht

Fig.

Fig. 143 aus zween ſenkrecht ineinander gefügten Aermen AB, und CD von der Einrichtung, daß CD in AB ſich verſchieben läßt. AM iſt z. B. in 100, und CD in doppelt ſo viel oder mehrere gleiche Theile eingetheilt, und die Anzahl Theile von A nach B und C nach D mit Zahlen bemerkt. Macht man CD vertikal, ſo iſt AB horizontal. Dieſes Inſtrument braucht man folgendergeſtalten. Wenn man über AB nachdem man CD vertikal geſtellt hat, unten an den Stamm eines Baumes hinviſirt, und den Ort N Fig. 144, wo man eintrift mit Etwas z. B. mit Röthel bezeichnet hat, ſo verſchiebt man CD in AB ſolang, bis man über AC weg den Punkt P am Stamme ſieht, deſſen Höhe über den mit Röthel bemerkten Punkt gefunden werden ſolle In dieſer Stellung des Inſtruments wird AM : CM = AN : NP ſeyn, weil CAM = PAN und CMA = PNA = R. Nun läßt ſich AN, die Entfernung des Baums von A meſſen, AM, und CM giebt das Inſtrument in ſolchen Theilen, in

die

die es eingetheilt iſt. Folglich weil $MA = 100$ iſt, ſo wird die Höhe $NP = \frac{AN \times CM}{AM}$ $= \frac{NA \times CM}{100}$. Mißt man mit einem Zirkel oder Stäbchen noch die Hypothenuſe AC, und trägt ſie von C gegen D, ſo findet man auch AC in Theilen des Inſtrumentes. So wie die Ebene des Inſtruments AMB bisher vertikal war, ſo bringe man ſie in die horizontale Ebene durch N, meſſe auf eben die Art die Dicke des Baumes xy unten Fig. 145, und zehle die Theile von C bis M. Bringt man die Ebene des Inſtruments noch in eine Lage, wo ſie durch P Fig. 144 geht, ſo läßt ſich auf eine ähnliche Art auch der obere Diameter damit meſſen. Man ſetze, der obere Durchmeſſer in P ſey $= x$, der untere in $N = D$. Die Anzahl der Theile, welche das Inſtrument zeigte, als man nach P und N viſirte, um die ſcheinbaren Diameter zu erhalten, ſeyen c und C. Die Hypothenuſe AC Fig. 144 ſey h. So wird

x

$x = \frac{chD}{100C}$ ſeyn, denn die Winkel, unter welchen man die Diameter ſieht, ſind deſto größer, je größer die Diameter ſelbſt, und je kleiner derſelben Entfernungen vom Auge in A ſind. Weil die Winkel klein ſind, ſo darf man annehmen, daß ſie ſich, wie c : C verhalten; alſo iſt C : $c = \frac{D}{AN} : \frac{x}{AP}$. Aber AN : AP = AM : AC, weil $\triangle ANP \backsim \triangle ACM$ und AM : AC = 100 : h. Alſo $\frac{D}{AN} : \frac{x}{AP} = \frac{D}{100} : \frac{x}{h} = C : c$. Und $x = \frac{D \times c}{100} : \frac{C}{h} = \frac{chD}{100C}$.

Ich begnüge mich die Gründe von dieſem Ausdrucke angezeigt, und etwas weniges vom Höhenmeſſen ſtehender Bäume geſagt zu haben. Wer glaubt, daß dergleichen Meſſungen etwa bey der Taxirung der Wälder von Vortheil ſeyn möchten, der kann im Hrn. Prof. Jungs Lehrbuche von der Forſtwirthſchaft, und Hrn. Prof. Däzls praktiſchen Anleitung zur Taxirung der Wälder, woraus der Aus-

druck

druck $x = \frac{D\,c\,h}{100\,C}$ entnommen iſt, ſich weitern Raths erholen.

56. Satz. Lehrſatz.

§. 230. Wenn eine Linie ae = af Fig. 146 in der Seite ab des Rechteckes m mal, in der Seite ac aber n mal enthalten iſt, ſo ſteckt das Quadrat von ae oder aeq im Rechtecke abdc ſo oft, als die Einheit im Produkte mn.

Beweis. So oft ae in ab enthalten iſt, ſo viel Quadrate wie aegf können in einer Reihe nebeneinander über ab liegen; Reihen aber, wie afhb können nicht mehr übereinander geſetzt werden, als vielmal ae = af in ac enthalten iſt. Die Zahl m giebt alſo die Quadrate über ab, und die Zahl n wie oft die vorige Anzahl Quadrate m in dem Rechtecke übereinander liegen, folglich das Produkt mn die Anzahl aller kleinen Qua-

Quadrate wie aegf welche in dem Rechtecke enthalten ſind, oder das Rechteck enthält das Quadrat aegf ſo vielmal als das Produkt mn die Einheit.

§. 231. Zuſatz. Der Satz ſetzt voraus, daß ſich die Seiten ac, ab des Rechteckes mit dem angenommenen Maaßſtabe ae genau ausmeſſen laſſen. Geſchieht dieſes nicht, und läßt ſich zwar der Maaßſtab Fig. 147 in der Seite AC genau m mal, in der AB mehr als n mal, aber nicht völlig n + 1 mal umſchlagen, wo m und n ganze Zahlen bedeuten, ſo wird das, was nach n Umſchlägen noch übrig iſt, nur einen Theil des Maaßſtabes betragen. Es ſey AE der Maaßſtab. AC = m×AE AK = n×AE, und KB < AE, ſo iſt AC×AK = mn×AEq = AKMC kleiner als ABDC um KMDB. Aber je kleiner AE, folglich noch viel mehr KB iſt, deſto kleiner wird KMDB, daher weil die Größe des Maaßſtabes willkührlich iſt, ſo verſchwindet KMDB, wenn der Maaß-

ſtab

ſtab unendlich klein iſt, und der Satz iſt allgemein wahr, die Seiten mögen ein gemeinſchäftliches Maaß haben oder nicht.

§. 132. Zuſatz. Nach dem Lehrſatze iſt Fig. 146 aeq : Rechteck abdc = 1 : mn. Alſo mn×aeq = Rechteck abdc. Das iſt, das Quadrat des Maaßſtabes mn mal genommen, iſt dem Rechtecke gleich, oder das Rechteck läßt ſich mit mn Quadraten des Maaßſtabes genau ausfüllen.

§. 233. Anmerkung. Meſſen überhaupt heißt ähnliche Dinge miteinander vergleichen, alſo Flächen meſſen, Flächen mit Flächen vergleichen. Daher iſt der Flächen Maaſtab eine Fläche, und wenn man beyde Seiten des Rechteckes mit einerley Maaße mißt, ein Quadrat. Wollte man die Seiten des Rechteckes mit verſchiedenen Maaßſtäben ausmeſſen, ſo würde der Flächen Maaßſtab ein Rechteck ſeyn.

§. 234.

§. 234. Zuſatz. Wenn die Ruthe 10 Fuß in die Länge hält, ſo beſteht die Quadratruthe aus 100 Quadratfußen, nämlich 10 Quadratfuße in jeder Reihe, und 10 Reihen übereinander. Drückt man alſo das Wort Quadrat durch □ aus, ſo iſt $\overset{\square^{\circ}}{1} = \overset{\square'}{100}$ und aus gleichen Gründen $\overset{\square'}{1} = \overset{\square''}{100}$. Und $\overset{\square''}{1} = \overset{\square'''}{100}$ im zehntheiligen Maaße.

§. 235. Zuſatz. Bey dem zwölftheiligen Maaße iſt $\overset{\square^{\circ}}{1} = 12 \times 12 = \overset{\square'}{144}$, $\overset{\square'}{1} = \overset{\square''}{144}$ und $\overset{\square''}{1} = \overset{\square'''}{144}$.

§. 236. Anmerkung. Die Rechnung bey zehentheiligem Maaße hat keine Schwierigkeit, wenn man höhere Maaße auf niedrigere, oder umgekehrt bringen ſoll. So ſind z. B. $\overset{\square^{\circ}}{4}\ \overset{\square'}{25} = \overset{\square'}{425}$; dann $\overset{\square^{\circ}}{4}$

$= 400^{\square'}$ alſo $400^{\square'} + 25^{\square'} = 425^{\square'}$. Eben ſo ſind $23^{\square^\circ}\, 5^{\square'}\, 32^{\square''} = 230532^{\square'''}$. Denn $23^{\square^\circ} = 2300^{\square'}$ alſo $23^{\square^\circ}\, 5' = 2305^{\square'}$ und $2305^{\square'} = 230500^{\square''}$ folglich $23^{\square^\circ}\, 5^{\square'}\, 32^{\square''} = 230532^{\square''}$. Man darf alſo die Zahlen, welche die Ruthen, Fuße, Zolle ꝛc. angeben, nur in der genannten Ordnung anſchreiben, und wenn die Zahlen, womit die Menge Fuße, Zolle, Linien angezeigt ſind, nicht mehr als eine Ziffer haben, vor derſelben eine Nulle ſetzen. Iſt von Fußen, oder Zollen ꝛc. gar nichts gegeben, ſo ſetzt man in ihre Stelle 2 Nullen; ſo iſt z. B. $3^{\square^\circ}\, 25^{\square''} = 30025^{\square''}$. Eben ſo leicht laſſen ſich niedrigere Maaße auf höhere bringen. Denn, wenn man die Zahlen von der Rechten zur Linken in Klaſſen theilt, ſo giebt jede nächſtfolgende Klaſſe gegen die Linke die Menge Einheiten eines nächſt hö-

heren Maaßes. So z. B. iſt $54670345\,\square'''$ $= 54\,\square^{\circ}\;67\,\square'\;3\,\square''\;45\,\square'''$. Denn, wegen $100\,\square''' = 1\,\square''$, iſt $\frac{54670345}{100\,\square'''} = 546703\,\square'' + \frac{45}{100}\,\square''$ aber $\frac{45}{100}\,\square'' = 45'''$ ferner wegen $100\,\square'' = 1\,\square'$ iſt $\frac{546703}{100\,\square''} = 5467\,\square' + 3\,\square''$ und $\frac{5467}{100\,\square'}\,\square' = 45\,\square^{\circ} + 67\,\square'$ weil $100\,\square' = 1\,\square^{\circ}$. Alſo iſt $5470345\,\square''' = 54\,\square^{\circ}\;67\,\square'\;3\,\square''\;45\,\square'''$. Iſt das Maaß nicht zehentheilig, ſondern zwölftheilig; ſo muß durch 144 multiplizirt, oder dividirt werden, wenn man ein nächſt höheres Maaß auf ein nächſt niedrigeres oder umgekehrt bringen will.

Wenn

Wenn man z. B. $24^{\square^\circ}\ 25^{\square'}$ hat, ſo ſind im zwölftheiligen Maaße $24^{\square^\circ} = 24 \times 144 = 3456^{\square'}$; alſo $24^{\square^\circ}\ 25^{\square'} = 3456^{\square'} + 25^{\square'} = 3481^{\square'}$. Sollen im Gegentheile $5271^{\square'}$ auf Ruthen gebracht werden, ſo muß man durch 144 dividiren. Es iſt aber $\frac{5271^{\square'}}{144^{\square'}} = 36^{\square^\circ} + \frac{87}{144}^{\square^\circ} = 36^{\square^\circ}\ 87^{\square'}$; weil $\frac{87}{144}^{\square^\circ} = 87^{\square'}$ im zwölftheiligen Maaße iſt. Man ſieht, daß dergleichen Reduktionen bey jedem andern als zehentheiligen Maaße der Multiplikationen, und Diviſionen wegen, die bey dem zehentheiligen wegfallen, beſchwerlich ſind. Daher pflegt man ſich in der ausübenden Meßkunſt, bey der Ausmeſſung und Berechnung der Flächen, des zehen-

theiligen Maaßes vor dem zwölftheiligen zu bedienen.

§. 237. Zuſatz. Weil die Parallelograme von einerley Grundlinie und Höhe gleichen Inhalts ſind, §. 84, ſo iſt das ſchiefe Parallelogram ABCD dem Rechtecke AEFD Fig. 148 gleich. Man findet es alſo, wenn man die Grundlinie AD mit der Höhe BM = AE multiplizirt.

§. 238. Zuſatz. Es ſey ABCD Fig. 149 ein Rechteck, und AEFD ein ſchiefes Parallelogram von eben denſelben Seiten, oder AB = AE. So iſt der Flächeninhalt des Rechteckes größer als jener des ſchiefen Parallelograms, weil ſie bey einerley Grundlinie AD ungleiche Höhen EM und AB = AE haben, und die Höhe des Parallelograms EM kleiner als AB = AE iſt. Alſo läßt ſich aus der Gleichheit der Umfänge von zwoen Figuren nicht auf die Gleichheit ihrer Flächeninhalte ſchließen.

§. 239. Zuſatz. Das Dreyeck ABC iſt die Hälfte des Parallelograms ABEC von einerley Grundlinie und Höhe §. 66. Man findet daher den Flächeninhalt des Dreyecks, wenn man das Produkt aus der Grundlinie AC in die Höhe BD halbirt.

§. 240. Nach §. 170 Fig. 102, und nach den dortigen Benennungen, die ich hier beybehalte, iſt $ADq = a^2 - x^2 = (a+x)(a-x)$ §. 171. Aber x nach §. 170 $= \frac{c^2+a^2-b^2}{2c}$.

Daher $a + x = a + \frac{c^2+a^2-b^2}{2c} = \frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2c}$, und $a - x = a - \frac{c^2-a^2+b^2}{2c} = \frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{2c}$; folglich $(a-x)\times(a+x) = \left(\frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2c}\right)\left(\frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{2c}\right)$. Aber $a^2+c^2+2ac = (a+c)^2$, und $2ac-c^2-a^2 = -(c-a^2)$.

Alſo

Alſo wird $(a+x)(a-x) = \left(\frac{(a+c)^2-b^2}{2c}\right)$ $\left(\frac{b^2-(c-a)^2}{2c}\right)$. Nach §. 171 iſt

$$\frac{(a+c)^2-b^2}{2c} = \frac{(a+c+b)\ (a+c-b)}{2\ c}, \text{ und}$$

$$\frac{b^2-(c-a)^2}{2c} = \frac{(b+c-a)\ (b-c+a)}{2\ c}.$$

Alſo $ADq = a^2-x^2 = (a+x)\ (a-x)$

$$= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c)}{4c^2},$$

und $AD =$

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)\ (a+c-b)\ (b+c-a)\ (b+a-c)}}{2c.}$$

Der Flächeninhalt des Dreyecks BAC iſt alſo $= \frac{BC \times AD}{2} = \frac{c}{2} \times$

$$\frac{\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c)}}{2c} =$$

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c)}.$$

Dieſes kann man mit Worten ſo ausdrücken.

I. Man addire alle Seiten des Dreyecks zuſammen. II. Man ſubtrahire jede Seite von der Summe der zwoen andern, ſo erhält man drey Reſte. III. Die drey Reſte Nro. II. multiplizire man mit der Summe Nro. I. IV. Man ziehe aus dem Nro. III. erhaltenen Produkte die Quadratwurzel, und dividire ſie durch 4. Was herauskömmt, iſt der Flächeninhalt des Dreyecks.

Bedient man ſich bey dieſer Rechnung der Logarithmen, ſo iſt dieſelbe bequem und leicht, weil man nur die Logarithmen der drey Reſte Nro. II. und jenen der Summe Nro. I. zuſammen addiren, §. 191 Rechenk. und die Summe dieſer 4 Logarithmen halbiren darf, §. 193 Rechenk. um den Logarithm von der in dem Ausdrucke vorkommenden Wurzel zu erhalten. Sucht man ſodann die dieſem Logarithm zugehörige Zahl in den Tafeln auf, und dividirt ſie durch 4, ſo hat man den Flächeninhalt des Dreyecks.

§. 241.

§. 241. Zuſatz. Zerlegt man durch die Diagonalen ein Vieleck in Dreyecke, ſo kann man jedes einzeln nach den vorhergehenden Zuſätzen berechnen. Alle zuſammen machen das Vieleck aus Man ziehe Fig. 151 z. B. die Diagonalen CA, CE; fälle von B auf AC, auch von A und D auf EC, die Perpendikel BH, AF, DG; meſſe die Grundlinien und Höhen auf dem Maaßſtabe, nach welchem die Figur entworfen iſt, und multiplizire die Grundlinie und Höhe eines jeden Dreyecks ineinander; ſo giebt die halbe Summe aller dieſer Produkte den Flächeninhalt von ABCDE.

§. 242. Anmerkung. Wenn b die Grundlinie, a die Höhe eines Dreyecks bedeutet, ſo iſt deſſelben Flächeninhalt $= \frac{ab}{2}$; aber $\frac{ab}{2} = \frac{a}{2} \times b = \frac{b}{2} \times a$. Daher iſt es einerley, ob man die halbe Höhe mit der ganzen Grundlinie, oder die halbe Grundlinie

linie mit der ganzen Höhe multiplizirt, oder das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe halbirt. Dadurch läßt ſich die Rechnung manchmal abkürzen. Auch thut man wohl, wenn man bey der Zerlegung der Figuren in Dreyecke, für zwey anliegende Dreyecke eine gemeinſchäftliche Grundlinie annimmt, wie Fig. 151 bey den ΔΔ ACE, ECD mit EC geſchehen iſt.

§. 243. Zuſatz. Im ordentlichen Vielecke ſind die Seiten Fig. 152 ab, bd. §. 20, und die Dreyecke acd, bcd &c. alle einander gleich. §. 113. Man erhält alſo den Inhalt des regulären Vielecks, wenn man den Inhalt eines dieſer Dreyecke mit der Anzahl aller, oder mit der Anzahl der Seiten des Vielecks multiplizirt. Es ſey die Anzahl der Seiten n, ſo iſt der Inhalt des regulären Vielecks = $\frac{ab \times ck \times n}{2}$; aber ab × n iſt der Umfang des regulären Vielecks, alſo iſt der Flächeninhalt des regulären Vielecks dem halben Produkte aus dem Umfange in ck gleich.

§. 244. Zuſatz. Wenn man den Kreis in lauter gleiche Bögen theilt, ſo machen die Corden, wenn man die Theilungspunkte durch gerade Linien zuſammenzieht, ein reguläres Vieleck, §. 112. Daher kann man den Kreis als ein reguläres Vieleck von unzählig vielen Seiten betrachten. Wäre xy Fig. 153 unendlich klein, ſo würde das Perpendikel von c auf xy $= \sqrt{cxq - \frac{1}{2}xyq}$, von cx, oder dem Radius weniger verſchieden ſeyn, als ſich angeben läßt. Daher findet man die Kreisfläche, den Kreis als ein reguläres Vieleck von unzählig vielen Seiten betrachtet, wenn man das Produkt aus der Peripherie in den Radius halbirt.

§. 245. Zuſatz. In dem Trapeze ABCD Fig. 154, ſey AD mit BC parallel, BE aber ſenkrecht auf AD, ſo wird der Flächeninhalt des Trapezes $= \frac{(AD+BC)\,BE}{2}$ ſeyn. Denn man ziehe die Diagonal AC; ſo iſt das $\triangle ABC = \frac{BC \times BE}{2}$, das $\triangle ACD =$

AD×BE

$\frac{AD \times BE}{2}$. Folglich das Trapeze $= \Delta ABC + \Delta ACD = \frac{BC \times BE}{2} + \frac{AD \times BE}{2} = (BC+AD)\frac{BE}{2}$.

§. 246. Anmerkung. Die Anmerkung §. 242 gilt auch hier, und für §. 243, überhaupt ſo oft ein Produkt von zween Faktorn halbirt werden ſoll.

§. 247. Zuſatz. Es ſey Fig. 155 eine zum Theil krummlinigte Figur; durch die Winkelpunkte der Figur c, d, e &c. ſeyen die Parallelen cC, dD, eE &c. gezogen; die Punkte g, h, k, l, m, n ſeyen ſo an der krummen Linie angenommen, daß die durch dieſelbe gezogenen Parallelen, beyderſeits Stücke von der krummen Linie zwiſchen ſich faſſen, die man ohne merklichen Fehler als gerade anſehen kann. Auf alle dieſe Parallelen ſey die Linie AB, die ich eine Achſe nennen will, ſenk-

ſenkrecht. Die Achſe kann auch außerhalb der Figur liegen, wie z. B. ab. Das △ CAc und NBn, das man ohne merklichen Fehler als ein Dreyeck anſehen kann, laſſen ſich nach § 239 finden. Die übrigen Stücke wie CeDd, DdEe, EeFf &c. laſſen ſich als Trapezen nach § 245 berechnen. Addirt man die △△ CAc, NBn, und alle Trapezen zuſammen, ſo hat man den Inhalt der ganzen Figur.

§. 248. Zuſatz. Man ſetze, es ſeyen alle Höhen der Trapezen, das iſt, Pp, pQ, Qq &c. gleich, ihre Summe Pt = x; ihre Anzahl aber = n; ſo wird jede Höhe, wie Pp, pQ &c. $= \frac{x}{n}$ ſeyn. Der Flächeninhalt zwiſchen Cc und Nn iſt daher §. 245,

$$= \frac{x}{n}\left(\frac{Cc+Dd}{2}\right) + \frac{x}{n}\left(\frac{Dd+Ee}{2}\right) + \frac{x}{n}\left(\frac{Ee+Ff}{2}\right) - - \cdot - - - + \frac{x}{n}\left(\frac{Ll+Mm}{2}\right)$$

+

$$+\frac{x}{n}\left(\frac{Mm+Nn}{2}\right)=\frac{x}{n}\times\frac{Cc}{2}+\frac{x}{n}\times\frac{Dd}{2}$$

$$+\frac{x}{n}\times\frac{Dd}{2}+\frac{x}{n}\times\frac{Ee}{2}+\frac{x}{n}\times\frac{Ee}{2}----$$

$$+\frac{x}{n}\times\frac{Mm}{2}+\frac{x}{n}\times\frac{Nn}{2}=\frac{x}{n}(Dd+Ee$$

$$+Ef\ldots\ldots+Ll+Mm)+\frac{x}{n}\left(\frac{Cc+Nn}{2}\right).$$

Man darf alſo nur zur halben Summe der äußerſten Parallelen $=\frac{Cc+Nn}{2}$, alle mittlere Dd, Ee, Ff, Gg, Hh, Kk, Ll, Mm addiren, und alles mit $\frac{x}{n}$ multipliziren, ſo hat man das zwiſchen Cc und Nn erhaltene Stück Fläche; wozu noch die Stücke CAC, NBn, beſonders berechnet und hinzugethan, den ganzen Inhalt der Figur geben.

§. 249. Zuſatz. Wenn man die Ruthe zur Einheit annimt, ſo ſind die Fuße Zehentheile der angenommenen Einheit. Mißt man daher die Parallelen Cc, Dd &c. in

Ru-

Ruthen und Zehentheilen derſelben, und macht $\frac{x}{n} = 1°$. So giebt die halbe Summe der äuſſerſten Parallelen Cc, und Nn ſammt der Summe aller mittlen zwiſchen Cc und Nn das Stück Fläche, welches zwiſchen Cc und Nn liegt. Wäre $\frac{x}{n} = 2°$, ſo darf man das, was für $\frac{x}{n} = 1°$ herauskömmt, nur mit 2 multipliziren, und eben ſo mit 3, wenn $\frac{x}{n} = 3°$ geſetzt worden wäre.

§. 250. **Anmerkung.** Das Verfahren mittelſt der Zerlegung in Trapezen, den Flächeninhalt zu finden, beſonders, wenn die in Grund gelegten Figuren am Umfange krummlinigt ſind, iſt ſehr bequem und einer Zerlegung in Dreyecke weit vorzuziehen. Da die Parallelen, nach §. 166, richtig und bequem gezogen werden können, ſo hat dieſes keine Schwierigkeit, und kann ſelbſt, wenn

der

der Flächeninhalt geradelinigter Figuren gefunden werden ſoll, mit Vortheil gebraucht werden, wie Fig. 156 zeigt. Daß man bey krummlinigten Figuren den Inhalt nur beynahe erhielte, bedarf wohl keiner Erinnerung. Dieſes verlangt man, und kann bey dergleichen Figuren nicht mehr verlangen, wenn man die Art überlegt, nach welcher ſie, §. 173, aufgenommen zu werden pflegen.

57. Satz. Lehrſatz.

§. 251. Aehnliche Dreyecke ABC, abc verhalten ſich, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten, Fig. 157.

Beweis. Man fälle die Perpendikel BD, bd, ſo ſind die $\triangle\triangle$ ABD, abd ähnlich. Denn BAD = bad, wegen $\triangle$ ABC $\backsim$ $\triangle$ abc; und ADB = R = adb. Alſo hat man wegen der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ BAD, bad, Ab : ab = BD : bd, und wegen $\triangle$ ABC $\backsim$ $\triangle$ abc, AB : ab = AC : ac. Setzt man beyde

Pro-

Proportionen zuſammen §. 169 Rechenk. ſo wird auch ABq : abq = AC × BD : ac×bd

$= \frac{AC \times BD}{2} : \frac{ac \times bd}{2}$, §. 155. Rechenk.

$= \triangle ABC : \triangle abc$. §. 239.

§. 252. Zuſatz. Weil ſich ähnliche Figuren in ähnliche Dreyecke zerfällen laſſen, §. 136. Fig 78, ſo verhalten ſie ſich, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten. Denn, wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke, iſt nach dem Lehrſatze:

$\triangle ABC : \triangle abc = BCq : bcq.$

$\triangle ACD : \triangle acd = DCq : dcq.$

$\triangle DAE : \triangle dae = DEq : deq.$

$\triangle EAF : \triangle eaf = EFq : efq.$

Aber, weil die Figuren ähnlich ſind; ſo ſind die Verhältniſſe aller ähnlich liegenden Seiten, §. 21, folglich auch die Verhältniſſe der Quadraten dieſer Seiten gleich, §. 170 Rechenk. Alſo $\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle DAE + \triangle EAF : \triangle abc + \triangle acd + \triangle dae$

+

$+ \Delta$ eaſ $=$ BCq : bcq $=$ DCq : dcq &c. §. 160 Rechenk. II. Das iſt, weil die Summe aller Dreyecke einer Figur die Figur ſelbſt iſt, ſo verhält ſich ABCDEF : abcdef $=$ BCq : bcq $=$ DCq : dcq &c.

§. 253. Anmerkung. ABCDEFGH und abcdefgh Fig. 158 ſeyen reguläre Vielecke von einer gleichen Anzahl Seiten, man beſchreibe um dieſelben Kreiſe §. 112. Weil bey regulären Figuren von einerley Anzahl Seiten die Centralwinkel gleich ſind, §. 113, ſo ſind die $\Delta\Delta$ KAB, kab ähnlich §. 129. Alſo ka : KA $=$ ab : AB $=$ n×ab : n×AB, wo n die Anzahl der Seiten des Vielecks bedeuten ſoll. Aber n×ab iſt der Umfang vom kleinern, n×AB der Umfang vom größern Vieleck. Daher verhalten ſich die Umfänge regulärer Vielecke von einerley Anzahl Seiten, wie die Radien oder Diameter der Kreiſe, die ſich um dieſelben beſchreiben laſſen. Betrachtet man die Kreiſe ſelbſt als reguläre Vielecke von unzählig vielen Seiten,

ſo verhalten ſich ihre Peripherien, wie ihre Diameter.

§. 254. Anmerkung. I. ab Fig. 153 ſey die Seite eines regulären Vielecks, das im Kreiſe beſchrieben iſt. Man fälle das Perpendikel cd, verlängere es bis an des Kreiſes Umfang, und ziehe in e eine Tangente; ſo iſt mn die Seite eines regulären Vieleckes, welches um den Kreis beſchrieben iſt, von einerley Anzahl Seiten mit dem eingeſchriebenen. Weil die △△ dcb, ecn wegen der rechten Winkel bey d und e, und des gemeinſchäftlichen Winkels dcb ähnlich ſind, §. 123, ſo iſt cd : ce = 2 db : 2 en = ab : mn §. 96 = Umfang von dem eingeſchriebenen : Umfang des umſchriebenen Vielecks §. 253, aber auch cdq : ceq = abq : mnq §. 170 Rechenk. = Flächeninhalt des eingeſchriebenen : Flächeninhalt des umſchriebenen Vielecks §. 252, weil bey regulären Vielecken alle Winkel und Seiten gleich, alſo reguläre Vielecke von einerley Anzahl Seiten ähn-

ähnlich ſind. §§. 20. 21. Je näher alſo das Perpendikel cd vom Mittelpunkte auf die Seite des Vielecks, dem Radius kömmt, deſto näher kommen einander ſowohl die Umfänge als Flächeninhalte der eingeſchriebenen und umgeſchriebenen Vielecke von gleicher Anzahl Seiten in einerley Kreiſe. Laſſen ſich die Umfänge der eingeſchriebenen regulären Vielecke, und die Perpendikel vom Mittelpunkte auf ihre Seiten, berechnen, ſo können daraus leicht auch die Umfänge der umſchriebenen von einerley Anzahl Seiten gefunden werden.

II. Heißt der Radius des Kreiſes r, die Seite des regulären Vielecks c, ſo iſt das Perpendikel, welches vom Mittelpunkte auf eine Seite des eingeſchriebenen Vielecks gefällt werden kann $= \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}$. Dadurch kann der Umfang des umgeſchriebenen Vielecks aus jenem des eingeſchriebenen berechnet werden Nro. I.

III. Wenn ab der Radius oder die Seite des Sechseckes §. 115, und cd auf ab perpendikulär iſt, ſo iſt eb = ae der Seite des Zwölfeckes. Aber $db = \frac{ab}{2}$ §. 95, und cbq — dbq = cdq §. 88, alſo cd $\sqrt{cbq - bdq}$; ferner ce — cd = de und ebq = deq + dbq §. 88, folglich eb = $\sqrt{dbq + deq}$. Man kann alſo die Seite des Zwölfeckes aus der Seite des Sechseckes finden, und auf eine ähnliche Art aus der Seite des Zwölfeckes die des Vierundzwanzigecks ꝛc. überhaupt aus der Seite eines regulären Vielecks von N Seiten, die Seite eines regulären Vielecks das 2 N Seiten hat.

IV. Je größer die Anzahl Seiten des in einerley Kreiſe eingeſchriebenen regulären Vielecks iſt, deſto kleiner iſt c, und je kleiner c deſtoweniger iſt $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}$ von r verſchieden, folglich auch der Umfang des eingeſchriebenen Vielecks von dem Umfange des umſchrie-

ſchriebenen Nro. I. Nun iſt aber allezeit der Umfang des Kreiſes kleiner als jener des umſchriebenen, und größer als derjenige des eingeſchriebenen Vielecks; folglich der Unterſchied zwiſchen dem Umfang des Kreiſes und jenem des eingeſchriebenen Vielecks kleiner als der Unterſchied zwiſchen dem Umfange des in dem Kreis und dem Umfange des um den Kreis beſchriebenen Vielecks, wenn beyde eine gleiche Anzahl Seiten haben.

V. Nach Gründen, die ich eben erläutert habe, hat man dem Umfang eines in dem Kreis, und den Umfang eines um dem Kreis beſchriebenen regulären Vielecks von einerley aber ſehr groſſer Menge Seiten geſucht, und gefunden, daß, wenn der Diameter = 1 geſetzt wird, der Umfang des Kreiſes größer als 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 50, aber kleiner als dieſe Zahl, wenn die letzte Ziffer in 1 verwandelt wird. In der Ausübung beſonders bey kleineren Kreiſen nimt man dieſe Zahl nur bis auf zwo

Dezi-

Dezimalſtellen, und ſetzt das Verhältniß des Diameters zur Peripherie = 1 : 3,14. Je ſchärfer die Rechnung geführt werden ſoll, deſto mehr Dezimalſtellen muß man annehmen.

58. Satz. Aufgabe.

§. 255. Wenn der Diameter eines Kreiſes gegeben iſt, deſſen Peripherie; und wenn die Peripherie gegeben iſt, deſſen Diameter zu finden.

Auflöſung. Weil die Diameter ſich wie die Peripherien verhalten, §. 253, und wenn der Diameter = 1, die Peripherie 3, 14 - - - iſt, ſo ſchließe man I. 1 : 3, 14 = d : p oder II. 3, 14 : 1 = p : d, wo d den Diameter, p die demſelben zugehörige Peripherie bedeutet.

§. 256. Anmerkung. Je mehr Dezimalen man aus §. 254 Nro. V. nimt, deſto genauer findet man d oder p.

59. Satz. Aufgabe.

§. 257. Aus dem gegebenen Diameter eines Kreiſes die Kreisfläche zu finden.

Auflöſung. Man ſuche §. 255 die dem gegebenen Diameter zugehörige Peripherie, multiplizire dieſelbe mit dem Radius, und dividire das Produkt durch 2, § 244, oder man multiplizire die Peripherie mit dem Diameter, und dividire das Produkt durch 4.

§. 258. Zuſatz. Es drücke $1 : \pi$ das Verhältniß des Diameters zur Peripherie aus, ſo iſt, wenn man den Radius $= r$ ſetzt, die Peripherie $= 2\pi r$ und $\frac{2\pi r \times r}{2} = \pi r^2$ die Fläche des Kreiſes.

§. 259. Zuſatz. Wenn d der Diameter iſt, ſo iſt $2r = d$, alſo $\frac{d}{2} = r$ und $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$. Man nehme π bis auf vier Dezi-

mal=

malſtellen, ſo iſt $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,1415\, d^2}{4} = 0,7853\, d^2$.

§. 260. Zuſatz. Der Ausſchnitt caebc Fig. 153 läßt ſich in dem Kreiſe ſo oft umſchlagen, als ſein Bogen ab in der Peripherie, oder als vielmal die Grade des Bogens ab in 360° enthalten ſind. Heißt alſo der Ausſchnitt S, der Inhalt des Kreiſes C, und iſt die Anzahl der Grade des Bogens ab = G, ſo iſt: S : C = G : 360°, folglich $S = \frac{GC}{360}$.

§. 261. Zuſatz. Wenn man das Dreyeck acb von dem Ausſchnitt caeb abzieht, ſo bleibt der Abſchnitt aeba übrig.

§. 262. Zuſatz. Die Krone oder den Raum zwiſchen zween konzentriſchen Kreiſen Fig. 159 findet man, wenn man die kleine Kreisfläche von der größern abzieht. Es

ſey

ſey der Radius des kleinern Kreiſes cb $= r$, des größeren CA $= R$, ſo iſt die Krone $= \pi R^2 - \pi r^2$ §. 258. $= \pi (R^2 - r^2) = \pi (R + r) (R - r)$ §. 171.

60. Satz. Aufgabe.

§. 263. Ein Trapeze, deſſen zwo Seiten ab, cd Fig. 160 parallel ſind, ſo zu theilen, durch eine Linie gl, daß das Stück ablg einen verlangten Inhalt habe, und gl mit ab, und cd parallel ſey.

Auflöſung. Man fälle ae auf dc perpendikulär, und ziehe af mit bc parallel. Ferner ſey $ab = a$, $cd = b$. $ae = p$. $ah = x$ $ablg = t$. Wegen der Parallelen af, bc iſt $fc = ab$ und $df = dc - fc = dc - ab = b - a$. Wegen der Parallelen gk, df ſind die $\Delta\Delta$ gak, daf ähnlich, §. 125, alſo $ah : ae = gk : df$ oder $x : p = gk : b - a$, folglich $gk = \frac{(b-a)x}{p}$ und das Δ gak

=

$= \frac{(b-a)xx}{2p}$ §. 239. Das Parallelogram ablk iſt $= ax$ §. 237. Daher wird gabl $= \Delta\, gak + kabl = t = \frac{(b-a)xx}{2p} + ax.$ $2pt = (b-a)xx + 2apx$. Dann $\frac{2pt}{b-a} = xx + \frac{2apx}{b-a}$ und $\frac{2pt}{b-a} + \frac{a^2p^2}{(b-a)_2} = x^2 + \frac{2apx}{b-a} + \frac{a^2p^2}{(b\text{-}a)^2}$, oder auch $\frac{2pt(b-a)+a^2p^2}{(b-a)^2} = x^2 + \frac{2apx}{b-a} + \frac{a^2p^2}{(b-a)^2}$. Man multiplizire und dividire das erſte Glied der Gleichung durch p^2, ſo iſt $\frac{p^2(2pt(b-a)+a^2p^2)}{p^2(b-a)^2} = \frac{p^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2pt(b-a)}{p^2} + \frac{a^2p^2}{p^2}\right) = \frac{p^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2t(b-a)}{p} + a^2\right) = x^2 + \frac{2apx}{b-a} + \frac{a^2p^2}{(a^2b)^2}$ alſo $\sqrt{\frac{p^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2t(b-a)}{p} + a^2\right)}$

=

$$= \frac{p}{b-a} \sqrt{\left(\frac{2t(b-a)}{p} + a^2\right)} \text{ und}$$

$$\frac{p}{b-a} \sqrt{\left(\frac{2t(b-a)}{p} + a^2\right)} =$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{2apx}{b-a} + \frac{a^2p^2}{(b-a)^2}} = x + \frac{ap}{b-a}.$$

Daher hat man $x + \frac{ap}{b-a} = \frac{p}{b-a}$ $\sqrt{\left(\frac{2t(b-a)}{p} + a^2\right)}$ alſo $x = -\frac{ap}{b-a}$ $+ \frac{p}{b-a} \sqrt{\left(\frac{2t(b-a)}{p} + a^2\right)} = \frac{p}{b-a}$ $\left(-a + \sqrt{(2t\frac{(b-a)}{p} + a^2)}\right)$. Wenn man daher ſtatt a, b, p und t die Werthe in Zahlen ſetzt, ſo kann man x = ah finden, daſſelbe aus a in ae bis h auftragen, und durch h eine Parallel mit dc ziehen, welche das Trapeze auf die verlangte Art theilen wird.

Exem:

Exempel. Es ſey $ab = a = 15^{\circ}$. $dc = b = 32^{\circ}$. $ae = p = 11^{\circ}$. ſo iſt $(a+b)\frac{p}{2} = (15+32)\frac{11}{2} = 258{,}5$ $\square^{\circ}$ der Inhalt des Trapezes abcd. §. 245. Man ſoll ein Stück gabl abſchneiden, ſo, daß deſſen Inhalt $100\ \square^{\circ}$ und gl mit dc parallel iſt. Dadurch iſt $t = 100$. $\frac{2t(b-a)}{p} = \frac{2 \times 100 \times 17}{11} = 309{,}19$. $a^2 = 15 \times 15 = 225$, folglich $\sqrt{\frac{2t(b-a)}{p} + a^2} = \sqrt{309{,}19 + 225} = \sqrt{534{,}19} = 23{,}11$. Alſo $\sqrt{\left(\frac{2t(b-a)}{p} + a^2\right)} - a = 23{,}11 - 15 = 8{,}11$. Welches noch mit $\frac{p}{b-a} = \frac{11}{17}$ multiplizirt $x = ah = \frac{8{,}11 \times 11}{17} = \frac{89{,}21}{17} = 5{,}247$, oder ohngefähr $5^{\circ}2\frac{1}{2}'$ giebt Nimt man daher $ah = 5^{\circ}2\frac{1}{2}'$, und zieht gl mit cd

paral-

parallel, ſo wird gabl beynahe $100^{\square°}$ halten.

§. 264. Zuſatz. Wenn die Punkte a und b in einen zuſammenfallen, oder ab = a = o geſetzt wird, ſo verwandelt ſich das Trapeze in ein Dreyeck, und der Ausdruck für x (wenn a = o iſt) wird $= \frac{p}{b}\sqrt{\frac{2tb}{p}}$ $= \sqrt{\frac{2tbp^2}{pb^2}} = \sqrt{\frac{2tp}{b}}$.

Exempel. Man ſoll Fig. 161 von dem Δ ABC ein Stück DBE abſchneiden; deſſen Inhalt $t = 30^{\square°}$, ſo, daß die Linie DE mit AC parallel iſt. Es ſey AC = 18° BF = 10°. ſo wird $x = \sqrt{\frac{2tp}{b}} = \sqrt{\frac{2 \times 30 \times 10}{18}} = \sqrt{\frac{600}{18}} = \sqrt{33,33} = 5,77°$.

Nimt man daher BG = 5,77° und zieht

durch

durch G eine Parallel DE, ſo wird $\triangle$ BDE

$= 30 \square^{\circ}$ ſeyn.

§. 265. Anmerkung. Wenn die Wurzelgrößen irrational ſind, oder ſich keine genaue Wurzeln angeben laſſen, ſo findet man ah Fig. 160 und BG Fig. 161 immer um etwas weniges zu klein. Man kann aber dieſe Linien immer ſo genau finden, als man will, und ſo weit es in der Ausübung nöthig und möglich iſt.

§. 266. Anmerkung. Ehe ich die Art zeige, wie die Eintheilung der Förſte in ordentliche Gehaue bewerkſtelliget werden kann, ſo will ich etwas weniges aus Forſtmännern vorausſchicken, welches zu beſſerer Uebersicht dieſer Sache dienen möchte.

„Das Anlegen der Gehaue, ſagt Gleditſch „in 2tem Band, Seite 311 iſt das Meiſterſtück des Forſtverſtändigen, wobey er

„Gründ=

„ Gründlichkeit, Einſichten, Erfahrung auch „ Fleiß überall zeigen kann. Denn dieſe „ Anſtalten machen den Grund der ganzen „ Forſtwirthſchaft aus, und erfüllen den „ Endzweck derſelben.“ Gemeiniglich theilt man einen Forſt nach Beſchaffenheit des Holzbodens, der Holzarten ꝛc. in mehrere oder wenigere gleiche Theile, die man Schläge oder Gehaue nennt, und treibt einen nach dem andern in einer nach den Lokalumſtänden zu beſtimmenden Ordnung ab. Die Abſicht der Eintheilungen in Gehaue iſt, die möglichſt größte immerwährende Nutzung aus einem Forſte zu ziehen. Alſo müßen während der Zeit, bis man mit dem Hieb zum letzten Gehau herumkömmt, die zuerſt abgetriebenen ſchon wieder ſo herangewachſen ſeyn, daß man ſie neuerdings in der nämlichen Ordnung abholzen kann. Da die verſchiedenen Holzarten in verſchiedenen Boden bald mehr bald weniger Jahre nöthig haben, bis ſie zu der Abſicht, zu welcher ſie als Bau- Brenn- Nutzholz beſtimmt ſind, die gehöri-

ge Stärke und Vollkommenheit erlangen, ſo können die Umſtände jedes Ortes allein dieſe Anzahl Jahre, und folglich die Anzahl Gehaue beſtimmen, welche in jedem einzelnen Forſte anzulegen ſind. Der Grund und Boden, das Alter, die Art, und das Wachsthum ꝛc. muß dieſes lehren. Den Meinungen der Forſtverſtändigen zufolge nähert ſich jede Holzart nach dem Verlaufe einer gewiſſen Anzahl Jahre ihrer beſten Nutzung. So geben ſie dem Tangel- oder Nadelholz nach des verſchiedenen Bodens Art und Wachsthume in demſelben 70 bis 100 Jahr, bis es dieſen Zuſtand erreicht. Für Lerchen, Eichen, und was ſonſt zu Schiff- und Bauholz beſtimmt iſt, fodern ſie 90 bis 150, und für Eichen insbeſondere noch wohl mehr Jahre. Andere Arten von Laubholz als die Eiche erfordern nach Gleditſch 60 bis 100 Jahre, die mittlern Arten 30 bis 40, die weicheren 15 bis 25, und die ſchlechten 10 bis 15 Jahre. Die ſchwachen und die kleinen haut man von 4, 5, 8 bis 10 oder 12 Jahre.

Welche Arten Laubholzes etwa unter die mittleren, weichen, ſchlechten, ſchwachen zu rechnen ſind, muß man ſich aus den Schriften der Forſtverſtändigen ſelbſt erſehen. Es kömmt beym Laubholz auch darauf an, ob man auf einen Aufſchlag aus Saamen, oder auf Ausſchlag und Stammloden ſeinen Antrag machen will. Nach Gleditſch ſollen die Gehaue die allerbequemſte, das iſt, der Erfahrung zufolge, wie er ſagt, eine rechtwinklichte Geſtalt haben. Die Abtheilungen alſo ſollen, wo möglich, Rechtecke ſeyn; ſo wie ſie z. B. auch Vierenklee in ſeiner Tab. 5 des praktiſchen Theils, wo es angeht, macht. Hr. Oettelt ſagt §. 71, Seite 63, Ausgabe von 1786: „Ein Förſter muß durch Hülfe der Geometrie ſo viele Acker abzumeſſen wiſſen, daß die geforderte Anzahl der Aecker auf jeden Schlag herauskomme, und die Schläge, ſie mögen eine Figur haben, welche ſie wollen, nach dem Quadratinhalte zu berechnen wiſſen.“ Was die Richtung betrift, ſo will Hr. Oettelt §. 72, Seite 64:

„ Daß ein rechtſchaffener Förſter ſeinen Forſt
„ kennen lerne, und wiſſen ſolle, wo die
„ Winde am ſchädlichſten ſtoſſen, ſich fan-
„ gen, und Schaden thun. Er wird (bey
„ Anlegung der Schläge) mit Verſtand und
„ durch Nachdenken auch dieſem zu beſor-
„ genden Uebel vorzubeugen ſuchen. Es läßt
„ ſich hier keine allgemeine Regel geben, weil
„ die Lagen zu verſchieden ſind. Diejeni-
„ gen, welche den Weſtſudweſt für den ge-
„ fährlichſten halten, haben nach der Lage
„ ihrer Waldungen Recht, und diejenigen,
„ welche den Nordweſtwind dafür halten,
„ können auch Recht haben. Aus dieſem
„ Grund haben viele für gut angeſehen, die
„ Schläge von Morgen gegen Abend zu ma-
„ chen ꝛc.“ Auf der Stelle gemachte Be-
obachtungen in Rückſicht der Winde können
alſo allein über die Richtung der Schläge,
zumal in bergigten Gegenden, entſcheiden.
Was die Richtung der Schläge noch betrift,
ſo will Hr. Oettelt, daß in Gebirgen die
Schläge Berg an gehen ſollen, weil der

Wind

Wind den Saamen wohl abwärts, aber nicht aufwärts führe. Ferner ſollen nach ihm, Seite 74, §. 88, in Laubhölzern die Schläge, ſo viel möglich, von Morgen gegen Abend gehen. Hat man Berge, ſo ſoll man auf der Winterſeite den Schlag von Abend gegen Mitternacht führen, weil ſonſt die Schläge zu wenig Sonne haben würden, ſo wie man aus eben dieſem Grunde auf der Winterſeite weniger Lasreiſer, als auf der Sommerſeite zu laſſen hat ꝛc. Einige fodern, man ſolle auch auf die Richtung der Winde ſehen, wenn ſie die geflügelten Saamen von den nebenſtehenden Bäumen auf dem Schlag gehörig verbreiten ſollen. Nimt man die Figur der Gehaue rechtwinklicht an, ſo kann nach den Forſtverſtändigen die Länge zwar ſo ziemlich willkührlich ſeyn, aber nicht die Breite. Beſonders in erhabenen freyen Gegenden, und an der Wetterſeite, auf ſteilen Klippen, und erhabenen Oertern ſoll die Breite nach Gleditſch deſto kleiner ſeyn, weil ein Sturm, ein ſtarker Schnee

 und

und Regenwaſſer dergleichen Oerter ſehr bald vom Moos mit der wenigen tragbaren Erde und dem Saamen entblößen kann. Auch ſollen die Nadelholzgehaue überhaupt eine kleinere Breite haben, als diejenigen des Laubholzes, weil man ſonſt keine wahrſcheinliche Rechnung auf eine Selbſtbeſaamung der abgetriebenen Schläge durch die angrenzenden Saamenbäume machen kann. Denn der Wind kann die Saamen dieſer Art, ſo leicht ſie auch ſind, nicht wohl über eine beſtimmte Weite fortbringen, und auf den abgetriebenen Gehauen gehörig verbreiten. Und eben darum läßt man auch die abgetriebenen angrenzenden Gehaue einige Jahre unangegriffen ſtehen, damit ſie ſich zu beſaamen Zeit haben, weil der Saame nicht alle Jahre geräth. Vierenklee giebt für die Breite der Nadelholzſchläge höchſtens 20 Ruthen an, Seite 407. Ihre Länge aber leidet nach ihm keine Vorſchrift. Bey hartem Holze aber verlangt er breitere Gehaue, theils weil dieſes wegen der Hut und Weyde beſſer ſeyn ſolle, theils weil der

ſchwerere Saame hier nicht ſo weit vom Winde getrieben werden kann, und die deßwegen für die natürliche Beſammung hin und wieder gelaſſene Saamenbäume mit den übrigen Lasreiſern, den jungen Loden zum Schutze wider die Sonnenhitze dienen müſſen. Bey vermiſchten Oertern, wo Nadel- und Laubholz beyſammen iſt, kömmt es darauf an, ob ſolche in der Zukunft zu Laub- oder Nadelholz ſollen angezogen werden. Im erſten Falle ſchaffe man alles Nadelholz heraus, und laſſe zumal in Gebirgen eine hinlängliche Anzahl Lasreiſer, weil da ohnehin einige von Schnee und Glatteiſe unterdrücket werden dürften. Im zweyten Falle läßt man nur einige wenige geſunde Lasreiſer von Eichen und Buchen des Nutzholzes wegen, und behandelt übrigens den Schlag wie einen Nadelholzſchlag.

§. 267. Anmerkung. Was die Größe der einzelnen Schläge betrift, ſo ſind ſie einander gleich oder nicht gleich. Sind ſie einander

gleich, ſo werden alle Jahre gleich viele Jocharte abgetrieben. Wenn man daher die Anzahl der Jocharte, welche der ganze Forſt enthält, durch die Anzahl der Gehaue dividirt, ſo hat man die Größe jeden einzelnen Gehaues. Die Anzahl der Schläge aber hängt von der Anzahl der Jahre der ab, in welchen man durch den ganzen Wald herumkommen will. Einige wollen anſtatt gleichviele Jocharte abzutreiben, jährlich gleichviele Klafter ſchlagen laſſen. Sie ſetzen voraus, daß man durch irgend eine von den Taxationsmethoden den geſammten Holzbeſtand eines Forſtes kenne, und aus demſelben, und einem angenommenen mittleren jährlichen Zuwachs durch die Rechenkunſt die jährliche gleiche Anzahl der Klafter ausgemacht habe, welche innerhalb einer gewiſſen Anzahl von Jahren geſchlagen werden kann, ohne den Wald über ſeinen Ertrag anzugreifen. Wäre dieſes einmal gefunden, ſo würde man im erſten Jahre ſo viele Jocharte abtreiben müſſen, als nöthig iſt, die verlangte Anzahl der Klafter

zu liefern. Aus der Größe des erſten Gehaues in Jocharten aber, und aus dem nach Befinden angenommenen jährlichen Zuwachſe würde man neuerdings vermittelſt der Rechenkunſt die Größe jeden der folgenden Gehaue ſuchen müſſen, die, wie man leicht einſieht, dem Flächeninhalt nach, immer kleiner. Ich geſtehe, daß die Eintheilung der Schläge nach dieſen Rechnungen vielen Schein für ſich hat. Ich ſetze daher für Liebhaber die hiezu nöthige Rechnungsaufgaben mit ihren Auflöſungen bey, aber nicht in der Abſicht ſie für die Ausübung zu empfehlen. Die Vorausſetzungen, auf welche dieſe Rechnungen gebaut ſind, werden jedem, der der Sache etwas genauer nachdenkt, von ſelbſt zeigen, was ſich mit Grunde dawider ſagen läßt.

61. Satz. Aufgabe.

§. 268. Der Jahrliche Zuwachs auf 1 Klafter ſey = m. Es frägt ſich, wie viel Klafter werden aus a Klafter in n Jahren?

Auf-

Auflöſung. Die geſuchte Zahl ſey $= x$. Weil aus jeder Klafter zu Ende des Jahres $1 + m$ Klafter wird, ſo ſieht die Rechnung folgender Geſtalt aus.

$1 : 1 + m = a : a(1+m)$ zu Ende des erſten Jahrs.

$1 : 1+m = a(1+m) : a(1+m)^2$ zu Ende des zweyten Jahrs.

$1 : 1+m = a(1+m)^2 : a(1+m)^3$ zu Ende des dritten Jahrs.

Alſo $x = a(1+m)^n$.

§. 269. Zuſatz. Weil $x = a(1+m)^n$, ſo iſt $\frac{x}{a} = (1+m)^n$, oder auch Log. x — Log. a §. 194 Rechenk. $= n$ Log. $(1+m)$ §. 192 Rechenk. und daher $\frac{\text{Log. } x - \text{Log. } a}{n} =$ Log. $(1+m)$.

62. Satz.

62. Satz. Aufgabe.

§. 270. Der geſammte Holzbeſtand in Klaftern ſey $= k$. Man ſoll in n Jahren herumkommen, ohne den Wald über ſeinen Ertrag anzugreifen, und alle Jahre gleich viel Klafter ſchlagen. Eine Klafter verhalte ſich zu ihrem jährlichen Zuwachſe wie $c : 1$, wie viel Klafter können jährlich gehauen werden?

Auflöſung. Die geſuchte Zahl ſey y. Weil ſich jede Klafter zu ihrem Zuwachſe, wie alle zu jenem aller verhalten, ſo iſt $c : 1 = k : \frac{k}{c}$, folglich iſt zu Ende des erſten Jahres der Holzbeſtand ſammt dem Zuwachſe $k + \frac{k}{c}$. Allein da jährlich y Klafter geſchlagen werden ſollen, ſo bleiben nur $k + \frac{k}{c} - y$ übrig. Dieſe Anzahl der Klafter geben im zweyten Jahre am Zuwachs $\frac{k}{c} + \frac{k}{c^2} - \frac{y}{c}$, folglich

iſt

iſt der geſammte Holzbeſtand ſammt dem Zuwachſe zu Ende des zweyten Jahrs $= k + \frac{k}{c} - y + \frac{k}{c} + \frac{k}{c^2} - \frac{y}{c} = k + \frac{2k}{c} + \frac{k}{c^2} - y - \frac{y}{c}$. Da nun wieder y Klafter geſchlagen werden, ſo bleiben zu Ende des zweyten Jahrs $k + \frac{2k}{c} + \frac{k}{c^2} - 2y - \frac{y}{c}$ Klafter übrig. Auf eine ähnliche Art findet man für das Ende des dritten Jahrs, wenn man die jedes Jahr zu ſchlagenden Klafter y abgezogen hat, $k + \frac{3k}{c} + \frac{3k}{c^2} + \frac{k}{c^3} - 3y - \frac{3y}{c} - \frac{y}{c^2}$. Alſo:

Zu Ende des erſten Jahrs.

$$k + \frac{k}{c} - y = k\left(1 + \frac{1}{c}\right) - y = k\left(\frac{c+1}{c}\right) - y.$$

Zu Ende des zweyten Jahrs.

$$k + \frac{2k}{c} + \frac{k}{c^2} - 2y - \frac{y}{c} = k$$

$$\left(1 + \frac{2}{c} + \frac{1}{c^2}\right) - y\left(2 + \frac{1}{c}\right).$$

$$= k\left(\frac{c^2+2c+1}{c^2}\right) - y\left(\frac{2c+1}{c}\right)$$

$$= k\left(\frac{c+1}{c}\right)^2 - y\left(\frac{(c+1)^2 \cdot c^2}{c}\right).$$

Zu Ende des dritten Jahrs.

$$k + \frac{3k}{c} + \frac{3k}{c^2} + \frac{k}{c^3} - 3y - \frac{3y}{c} - \frac{y}{c^2} =$$

$$k\left(1 + \frac{3}{c} + \frac{3}{c^2} + \frac{1}{c^3}\right) - y\left(3 + \frac{3}{c} + \frac{1}{c^2}\right) =$$

$$k\left(\frac{c^3+3c^2+3c+1}{c^3}\right) - y\left(\frac{3c^2+3c+1}{e^2}\right)$$

$$k\left(\frac{c+1}{c}\right)^3 - y\left(\frac{(c+1)^3 - c^3}{c^2}\right).$$

Dar-

Daraus folgt, daß der Holzbeſtand nach n Jahren überhaupt $k\left(\frac{c+1}{c}\right)^n - y\left(\frac{(c+1)^n - c^n}{c^{n-1}}\right)$ ſeyn werde. Allein die Aufgabe will, daß man nach n Jahren herumgekommen ſey, und den geſammten anfänglichen Holzbeſtand k ſammt allen indeſſen erfolgten jährlichen Zuwächſen durch wiederholte jährliche gleiche Schläge von y Klaftern erſchöpft habe, folglich muß nach n Jahren der geſammte Holzbeſtand ohne Rückſicht auf den neuen Nachwuchs $= 0 = k\left(\frac{c+1}{c}\right)^n - y\left(\frac{(c+1)^n - c^n}{c^{n-1}}\right)$ ſeyn. Folglich $k\left(\frac{c+1}{c}\right)^n = y\left(\frac{(c+1)^n - c^n}{c^{n-1}}\right) = y\frac{c}{c}\left(\frac{(c+1)^n - c^n}{c^{n-1}}\right) = yc\left(\frac{(c+1)^n}{c^n} - \frac{c^n}{c^n}\right) = yc\left[\left(\frac{c+1}{c}\right)^n - 1\right]$ Alſo $y = k\left(\frac{c+1}{c}\right)^n$:

$$e\left[\left(\frac{c+1}{c}\right)^n - 1\right] = \frac{k\left(\frac{c+1}{c}\right)^n}{c\left[\left(\frac{c+1}{c}\right)^n - 1\right]}.$$

63. Satz. Aufgabe.

§. 271. Der jährliche Zuwachs ſey wieder $= m$. Wie groß iſt die Anzahl der Tagwerke oder Jocharte, welche nach n Jahen ſo viel Klafter Holz enthält, als zu Anfang eine, die $= f$ iſt?

Auflöſung. Die geſuchte Zahl ſey z. Man ſetze auf jeder Anzahl der Tagwerke $= f$. Stehen Anfangs a Klaftern, aber nach n Jahren werden x daraus; ſo wird eine Anzahl Tagwerke z die in dem Verhältniß $\frac{a}{x}$ kleiner als f iſt, eben ſo viel Klafter nach n Jahren enthalten, als zu Anfange eine die $= f$ war; oder es wird $z = \frac{fa}{x}$ und daraus $\frac{x}{a}$

$=$

$= \frac{f}{z}$ ſeyn, weil aber nach der Aufgabe §. 269 $\frac{x}{a} = (1+m)^n$ iſt, ſo wird auch $\frac{f}{z} = (1+m)^n$ und $z = \frac{f}{(1+m)^n}$ oder Log. z = Log. f − n Log. (1+m) ſeyn.

§. 272. Anmerkung. Nun will ich die Anwendung dieſer Aufgaben durch Beyſpiele in Zahlen etwas erläutern. Das Erſte deſſen ſich ein Förſter durch die Erfahrung am Orte ſelbſt würde verſichern müßen, wäre die Größe des jährlichen Zuwachſes. Nach den Beckmanniſchen Erfahrungen könnte man zwar den größten jährlichen Zuwachs 0,025, den mittlern 0,02, den ſchlechtern 0,015 auf die Klafter annehmen. Aber geſetzt, man habe einen Forſt z. B. innerhalb 20 Jahre zweymal taxirt, und gefunden, daß innerhalb dieſer Zeit aus 9800 Klaftern 14000 geworden ſind, ſo fragt ſich, wie groß der jährliche Zuwachs geweſen ſey? §. 269

iſt

iſt $\frac{\text{Log. } x - \text{Log. } a}{n}$ = Log. (1+m). Wo in unſerm gegenwärtigen Beyſpiel x = 14000, a = 9800, n = 20 iſt. Alſo $\frac{\text{Log. } 14000 \ \text{Log. } 9800}{20}$

$= \frac{4{,}1461280 - 3{,}9912261}{20} = 0{,}0077450$

= Log. 1,017 = Log. (1+m) daher 1 + m = 1,017; und der jährliche Zuwachs oder m = 0,017.

II. Der jährliche Zuwachs ſey alſo bekannt, und = 0,017. Die Anzahl der Klafter die auf den Stämmen ſtehen, 14000. Man will in 90 Jahren herumkommen, wie viel Klafter können jährlich geſchlagen werden? §. 270. iſt das, was jährlich geſchlagen werden kann, oder $y = k\left(\frac{c+1}{c}\right)^n : c\left[\left(\frac{c+1}{c}\right)^n - 1\right]$ wo für unſer Beyſpiel k = 14000, n = 90, und c : 1 das Verhältniß der Klafter zum jährlichen Zuwachſe bedeutet, folglich c : 1 = 1 : 0,017, alſo $c = \frac{1}{0{,}017}$ iſt. Daraus wird

(c+1)

$\frac{(c+1)}{c} = 1 + \frac{1}{0{,}017} : \frac{1}{0{,}017} = \frac{1017}{1000} =$
$1{,}017$. Alſo $y = \frac{14000 \times 1{,}017^{90} \times 0{,}017}{1{,}017^{90} - 1}$.

Nun iſt Log. 1,017 = 0,0073210, folglich Log. $1{,}017^{90}$ = 90 Log. 1,017 §. 192 Rechenk. = 0,0073210×90 = 0,6588900 = Log. 4,5592. Daher $1{,}017^{90}$ = 4,5592 und $1{,}017^{90} - 1$ = 3,5592. Dieſes giebt folgende Rechnung für y, wenn man Logarithmen gebraucht.

Log. 14000	=	4,1461280
Log. $1{,}017^{90}$	=	0,6588900
Log. 0,017	=	1,2304489 — 3
Summe	=	3,0354669.
Log. 3,5592	=	0,5513524

Differenz oder Log. y = 2,4841145 = Log. 304,8. Folglich könnte man jährlich 304,8 oder in einer runden Zahl 305 Klafter ſchlagen laſſen.

III.

III. Ich ſetze, man habe das erſte Jahr 5 Tagwerke abtreiben müßen, um die 305 Klafter zu erhalten. Es frägt ſich, wie viele Tagwerke wird man z. B. nach 20 Jahren abholzen müſſen, um ebenfalls 305 Klafter zu erhalten? Nach §. 271 iſt die geſuchte Zahl Tagwerke $z = \frac{f}{(1+m)^n}$, wo in unſerm Beyſpiel $f = 5$ Tagwerke, der jährliche Zuwachs oder $m = 0{,}017$, und $n = 20$ iſt. Es iſt aber §. 271 Log $z =$ Log. $f - n$ Log $(1+m)$. Nun iſt Log $5 = 0{,}6989700$, Log. $1{,}017 = 0{,}0073210$ und $0{,}0073210 \times 20 = n$ Log. $(1+m) = 0{,}1464200$. Daher Log. $z = 0{,}6989700 - 0{,}1464200 = 0{,}5525500 =$ Log. $3{,}569$, folglich würden nach 20 Jahren $3\frac{1}{2}$ Tagwerke beynahe eben ſo viel Holz liefern, als zu Anfang 5. Nach 90 Jahren würde 1,096 oder 1,1 Tagwerk 305 Klafter Holz liefern.

§. 273. **Anmerkung.** Ich will hier von den ſcheinbaren Schwierigkeiten, welche

die immer von neuen zu machenden Berechnungen und Eintheilungen etwa machen möchten, nachdem man einmal herumgekommen wäre, gar nichts erwähnen. Aber die zwote Aufgabe §. 270 ſetzt den geſammten Holzbeſtand und den jährlichen Zuwachs als bekannt voraus. Auch die erſte Aufgabe §. 269 ſetzt eine Taxation voraus. Nun muß ich geſtehen, daß ich zu keiner der bekannten Taxationsmethoden der Herren Beckmann, Oettelt, Vierenklee ꝛc. das Zutrauen habe, um dadurch den Holzbeſtand in Klaftern ſo ziemlich hinlänglich zu beſtimmen. Bey allen den mir bekannten Methoden beruht die Beſtimmung des Holzbeſtandes entweder auf der Aufmerkſamkeit, dem Fleiß, Augenmaaß, und Gutdünken derjenigen Perſonen, die zur Abzählung und Taxirung der Bäume gebraucht werden, oder auf einer Berechnung, die ſich auf Wahrſcheinlichkeit gründet. Vielleicht wäre hierinn der Schluß, den man von dem Holzbeſtand eines abgetriebenen Theils auf den Holzbeſtand des ganzen Waldes

macht,

macht, noch immer einer mühſamen Abzählung, und Schätzung der Baumſtämme vorzuziehen. Die dritte Aufgabe §. 271 dienet die jedes Jahr nöthige Anzahl der Tagwerke zu berechnen, um ebendieſelbe Menge der Klafter zu erhalten, welche nach der zwoten Aufgabe §. 270 beſtimmt worden ſind. Allein die Auflöſung, wie man leicht gewahr wird, ſetzt voraus, daß nicht nur der Forſt zu Anfang in allen ſeinen Theilen gleich gut mit Holz beſtanden ſey, ſondern auch, daß jede einzelne, nach und nach abzutreibende Tagwerke, der Verſchiedenheit ihres Bodens ungeachtet, einen jährlichen gleichen Zuwachs erhalten. Daß es aber nicht ſo ſey, beſonders bey den Wäldern, wo man durch eine Eintheilung in Gehaue erſt Ordnung einführen will, wird jedermann leicht zugeben. Alle Waldungen, welche man in ordentliche Schläge legen will, befinden ſich in einer Unordnung, aus der man ſie eben durch die Eintheilung in Schläge bringen will. Die einzelnen Theile ſind nicht gleich gut, nicht

mit Holz von gleichem Alter und Wuchſe beſtanden. Auch iſt die Güte des Holzbodens nicht durchaus einerley. Ferner ſind an einigen Orten Blößen, an andern der Waldboden verangert, mit Heyde ꝛc. überzogen, hier plätzig gehauen, dort ausgeleuchtet, da ein unordentlicher Strich vom Anfluge, anderwärts Stangenholz, in einigen Theilen ſchön gewachſenes ſchlagbares Holz ꝛc. Will man daher auch annehmen, daß ſich mittelſt der bisher bekannten Taxirungen der Holzbeſtand in Klaftern hinlänglich angeben und nach §. 270 die Anzahl der Klafter beſtimmen laſſe, die man in einem Walde ſchlagen kann, wenn man den jährlichen Zuwachs zugleich in Betracht zieht; ſo kann doch von der Aufgabe §. 271 kein Gebrauch gemacht werden; ſondern man müßte jährlich ohne Rückſicht auf die Anzahl der Tagwerke zu nehmen, ſo viel Holz ſchlagen, als nöthig wäre, die nach §. 270 berechnete Menge der Klafter zu erhalten.

Giebt man allen und jeden Gehauen einerley Größe, und Anzahl der Tagwerke, ſo fallen alle dergleichen Berechnungen, und darnach zu machende Eintheilungen weg, und die Sache wird für die Ausübung leichter. Man richtet ſich hiebey nach der vorhandenen Unordnung, ohne etwas anzunehmen, was nicht iſt. Iſt die Eintheilung einmal gut gemacht; ſo kann ſie für beſtändig beybehalten werden. Man nimmt auf den jährlichen Zuwachs dadurch den gehörigen Bedacht, daß man die beſſer beſtandenen Gehaue zuerſt angreift, junges, angehendes, halbgewachſenes Holz überhaupt ſchonet, und diejenigen Oerter, wo es vorſchlägt, auf ſpätere Gehaue und Jahre verſpart, ohne auf die Ordnung zu ſehen, welche die Gehaue, ihrer Lage nach, haben. Liefern zumal Anfangs einige Gehaue mehr, als die ſogenannte Konſumtion, oder die Anzahl der Klafter beträgt, welche der Forſt jährlich abgeben muß; ſo kann man es als Reſerveholz für die folgenden ärmeren Gehaue ſtehen laſſen. Auch

kann bey ſolchen Schlägen, welche nicht ſo viel abwerfen, als die Konſumtion beträgt, dasjenige zu Hülfe genommen werden, was ſich den ganzen Wald durch, vom anbrüchigen, zopftrocknen, abſtehenden oder abgeſtandenen Holze, Schnee= und Windbruch vorfindet. Reicht alles dieſes bey einzelnen, ſehr ſchlecht beſtandenen Gehauen nicht zu, ſo können mehr dann ein Gehau auf einmal abgetrieben werden; beſonders in den erſtern Jahren, um das jährliche Quantum zu erhalten, und der Erſatz in der Folge erwartet werden. Sollten dieſes weder reichhaltigere Gehaue, noch etwa der jährliche Zuwachs mit der Zeit erſetzen, ſo wird die Folge nur dieſe ſeyn, daß man um etliche wenige Jahre eher herumkömmt, als man ſich Anfangs vorgenommen hatte. Bey Landesförſten, wo ein Forſt für den andern, beſonders, wenn ſie nicht zu weit von einander entlegen ſind, eine Reſerve abgeben kann, wird man ſich, wenn man das Ganze in Ordnung bringen will, noch leichter wechſelweiſe aushelfen

kön-

können, bis alles in die gehörige Ordnung kömmt. Um auch auf das nöthige Bau- und Nutzholz den gehörigen Bedacht zu nehmen; ſo können die vorzüglich gut beſtandenen Reviere, die einen auf 4 bis 5 Fuß tief guten Boden haben, abgeſöndert, auch ſonſt noch hin und wieder einige Arten Nutzholzes, vorzüglich Eichen, nicht allein als Bauholz, ſondern auch der Maſtung wegen geſchont werden. Fällt die Größe der jährlichen Gehaue zu groß aus; ſo kann man ſie bey großen Förſten in zween kleinere theilen, und dieſelben etwa in verſchiedenen Orten anlegen, wie es die Lage der Ortſchaften, welche von dem Forſte ihr Holz beziehen, und der kürzere Transport des Holzes für dieſelben erfodern ſollten. Auch muß man bey der Anlegung der Gehaue wohl Acht haben, daß man die Triften durch die Hegung, Umſtägelung der Gehaue nicht hindere, einigen Ortſchaften ihre Weyde nicht erſchwere, und beſonders dem Viehe den Weg zur Tränke nicht ſperre. Daß man das Holz aus den abge-

getriebenen Gehauen nicht ſelbſt über die ge-
hegten Orte abführen müße, wird durch die Ordnung der Gehaue, und durch die Lage der Wege in dem Forſte ſo ſchwer nicht zu bewerkſtelligen ſeyn.

§. 274. Die Eintheilung der Schläge ſetzt eine genaue Vermeſſung, und Beſchreibung des Waldes voraus. Die Vermeſſung muß die Lage des Forſtes gegen die nächſten Dörfer, Ortſchaften, Straſſen, Flüße, Wege, welche von den Ortſchaften nach dem Walde gehen, beſonders aber die Figur, den Umfang, die Grenzen, den Flächeninhalt, die Wege im Innern, die darinn vorkommenden Wildbahnen, Holzwieſen, Aecker, Schläge, größere Blößen, Weyer, Bäche, Viehtränken, Schwaigen ꝛc. ihrer Lage und Größe nach, ſo genau als möglich angeben. Die Beſchreibung giebt die an den verſchiedenen Orten des Forſtes obwaltende Beſchaffenheit des Bodens, die am Orte herrſchenden gefährlichen Winde, die Gattung, die

Art,

Art, das Alter, den Wuchs des Holzes an, ob der Boden, und wo verangert, mit Heyde ꝛc. bewachſen, ob plåtzig gehauen, ob der Wald ausgeleuchtet iſt, wie das Holz ausgebracht wird, oder etwa in Riſſen, Schlenzen, durch Klauſen, und Flöſſen ausgebracht, und beſonders in die nächſten Ströme, wenn Ueberfluß vorhanden iſt, zu einem weitern Transport hingeſchaft werden könnte. Ferner muß die Beſchreibung, die jährliche Konſumtion, die Deputathölzer, die Rechte der Eingeforſteten, die Rechte der Ortſchaften, welche Weyd- Hut- Triftgerechtigkeit haben, enthalten, ob die Grenzen ſtriktig ſind, wo, zwiſchen welchen Intereſſenten ꝛc. Es verſteht ſich, daß den Feldmeſſern über alles dieß, und was ſie ſonſt noch in der Beſchreibung des Forſtes bemerken, und zugleich mit ihren Plans übergeben ſollen, eine genaue Inſtruktion ertheilt werden müßte.

§. 275. Weil man die Eintheilung in Schläge zuerſt auf dem Papier machen muß,

ehe

ehe man ſie in dem Walde ſelbſt vornimmt, ſo wird man einſehen warum man genauere Waldvermeſſungen gefodert habe. Man wird hierinn beſonders in Förſten, welche nicht in zu unebenem Boden liegen, und wo man gerade Linien durchhauen kann, und darf, die Vortheile dieſer Linien nicht nur in Rückſicht eines vorläufig zu beſtimmenden Gerippes wegen genauer Vermeſſung, ſondern auch dadurch kennen lernen; weil ſie auch dienen, die Lage alles deſſen, was im Inneren des Waldes vorkömmt, und gemeſſen werden muß, genauer der Lage nach zu beſtimmen, als ſonſt vielleicht nicht ſo wohl möglich iſt: Außerdem, daß ſie noch überdieß zur bequemen und richtigern Abtheilung in Gehaue auf dem Platze ſelbſt dienlich ſind. Iſt der Riß mit dem, was er vorſtellt, nicht ähnlich, und kömmt er mit demſelben nicht überein; ſo theilt man Etwas auf dem Papier, welches nicht exiſtirt. Wie kann man da zu rechte kommen, wenn darnach die Eintheilung am Orte ſelbſt in dem

Walde vorgenommen werden ſoll, wenn die Lage und Größe der Dinge anders auf dem Papier, anders im Forſte ſind?

§. 276. Hat man einen nach einer richtigen Vermeſſung, ſo genau als möglich verfertigten Riß, ſo zerlege man die Figur in Dreyecke oder Trapezen, ganz oder zum Theil, wie man es für gut findet, und berechne den geſammten Inhalt des Waldes nach §§. 239 und 250, dann auch nach dem erwähnten §§. oder nach §§. 247. 248. 249 den Flächeninhalt derjenigen im Inneren gelegenen Stücke, welche nicht zur Holzkultur beſtimmt ſind, als Weyer, Wieſen, Aecker ꝛc. und ziehe den Flächeninhalt derſelben, von dem Flächeninhalt des Ganzen innerhalb des Umfanges des Waldes gelegenen, ab, um den Flächeninhalt des eigentlichen zur Holzkultur beſtimmten Waldbodens zu haben. Dividirt man dieſen letztern Inhalt durch die Anzahl der Gehaue, in welche man den Forſt einzutheilen beſchloſſen hat; ſo giebt der Quotient die Größe jedes einzelnen Gehaues.

§. 277.

§. 277. Weil man bey der Eintheilung in Schläge die Richtung der gefährlichen Winde zu kennen braucht, um nicht die Gehaue ſo anzulegen, daß der Sturm in die gemachten Oeffnungen einbreche, und beſonders in Nadelhölzern Verwüſtungen verurſache, ſo muß dieſe Richtung in der Beſchreibung angemerkt, und die Waldgegenden auf dem Plan angezeigt ſeyn. Welche Winde aber jedem einzelnen Forſte beſonders in bergigten Gegenden, vorzüglich nachtheilig werden können, kann nicht anderſt als durch eigene oder fremde Beobachtungen am Orte ſelbſt ausgemacht werden. Die Lage des Forſtes in Rückſicht der Weltgegenden, ſo weit es hier nöthig iſt, kann auf folgende Art gefunden werden. Wenn in der Mitte des Diopternlineals, eine Magnetnadel angebracht iſt; ſo drehe man das Lineal auf dem vollgemachten Tiſche ſo lange bis die Nadel mit der Schärfe parallel iſt, oder mit einer gemeiniglich unter ihr mit der Schärfe parallel gezogenen Linie übereintrift. In die-

ſer

ſer Lage ziehe man an dem Lineal eine Linie, ſo wird ſie die Mittagslinie, oder Nord und Süd ohngefähr angeben. Allein, da die Nadel ſehr beträchtlich von der wahren Mittaglinie abweichen kann, und dieſe Abweichung nicht nur in verſchiedenen Orten verſchieden, ſondern auch in einerley Orte veränderlich iſt; ſo müßte man die Größe dieſer Abweichung in Graden kennen, und wiſſen, ob ſie öſt= oder weſtlich wäre, wenn man die Lage der wahren Mittagslinie vermittelſt der Magnetnadel einigermaſſen beſtimmen wollte. Varenius, nach der Newtoniſchen Ausgabe, räth unter andern an, Seite 504 man ſolle einen Stift errichten. Der Schatten, welchen der Stift um Mittag oder 12 Uhr wirft, wird die Lage der Mittagslinie angeben. Dieſes möchte wohl beſſer ſeyn, als wenn man ein halbes Sekulum hindurch mittelſt einer z. B. für die Hauptſtadt eines Landes gefundenen oder angenommenen Deklination der Magnetnadel, bey allen in verſchiedenen Orten entworfenen Planen, die La-

ge

ge des wahren Meridians angeben will. Soll die Sache genauer gemacht werden, ſo ziehe man in einer horizontalen Ebene etliche konzentriſche Kreiſe, errichte aus dem Mittelpunkt derſelben einen Stift vertikal, und beobachte, wann Vor- und Nachmittag der Schatten einerley Peripherie erreicht. Sobald dieſes geſchieht, ſo bemerke man in der Peripherie die zween Punkte, wo der Schatten Vor- und Nachmittag eintrift. Nimt man ſodann den Stift weg, zieht aus dem Mittelpunkt durch die bemerkten Punkte gerade Linien, und halbirt den Winkel, den ſie machen §. 40, ſo wird die Linie, welche den Winkel halbirt, die Lage der Mittagslinie am Ort der Beobachtung ſo genau angeben, als man hier nur verlangen kann. Legt man endlich an dieſe erhaltene Mittagslinie das Diopternlineal an; ſo kann man ſie auf dem Felde ausſtecken, und leicht auf mehr als eine Art in den Riß bringen. Ehe ich die Eintheilung in Schläge durch ein Beyſpiel zeige, ſo will ich noch folgende Aufgaben und Anmerkungen vorausſchicken.

64. Satz.

64. Satz. Aufgabe.

§. 278. Wenn der Inhalt und die Grundlinie eines Parallelograms oder Rechteckes gegeben ſind, deſſelben Höhe zu finden.

Aufloͤſung. Man dividire den Inhalt durch die gegebene Grundlinie, was herauskömmt, iſt die Höhe.

Beweis. Der Inhalt ſey $= P$, die Grundlinie $= b$, die Höhe $= x$, ſo iſt $P = bx$ §. 237. Alſo $\frac{P}{b} = x$.

§. 279. Zuſatz. Wäre der Inhalt eines Dreyeckes D, und deſſelben Grundlinie b, ſo iſt, wenn die Höhe x heißt, $D = \frac{bx}{2}$ und $2D = bx$; alſo $\frac{2D}{b} = x$.

65. Satz. Aufgabe.

§. 280. ABCD Fig. 162 ſey ein Trapeze, wo BC mit AD parallel, und CD auf AD ſenkrecht iſt. Es ſoll von ABCD ein gegebenes Stück AEDF abgeſchnitten werden, ſo das EF mit AD und BC parallell ſey.

Aufloſung. Man verlängere AB und DC, bis ſie in G zuſammen ſtoſſen. So iſt $\triangle AGD = \frac{AD \times GD}{2}$ §. 239, und $\triangle AGD$ — Trapeze $AEFD = \triangle EGF$. Folglich nach §. 264 $GF = \sqrt{\frac{2 \triangle EGF \times GD}{AD}}$.

Trägt man daher GF aus G in GD auf, ſo beſtimmt ſich der Punkt F, wodurch, wenn eine Parallele gezogen wird, das verlangte Trapeze AEFD abgeſchnitten wird.

§. 281. Zuſatz. Wäre BCEF ſtatt AEFD gegeben, ſo findet man das Trapeze AEFD leicht, weil AEFD = ABCD — EBCF

EBCF iſt. Folglich kann GF immer nach der Aufgabe geſucht und gefunden werden.

§. 282. Zuſatz. Wollte man das $\triangle$ AGD nicht durch Zeichnung finden, ſo ſetze man $BC = a$ $AD = b$. $CD = BH = p$. Dadurch wird, weil BCDH ein Rechteck iſt, $AH = b - a$ und weil $\triangle BAH \backsim \triangle GAD$ wegen des gemeinſchäftlichen Winkels bey A, und der rechten Winkel bey H und D, $AH : BH = AD : DG$, oder $b - a : p = b : GD$, alſo $GD = \frac{bp}{b-a}$ und $\frac{GD \times AD}{2} = \frac{bp}{b-a} \times \frac{b}{2} = \frac{bbp}{2(b-a)} = \triangle ADG$ ſeyn.

§. 283. Anmerkung. ac und bd ſeyen Fig. 163 beyde auf ab ſenkrecht. Es ſoll durch x eine Parallele mit ab gezogen werden? Man ſetze einen Zirkelfuß in x, und eröffne den Zirkel durch wiederholte Verſuche ſo weit, bis der mit ſeiner Eröffnung beſchriebene Bogen die Linie ab berührt.

 Die

Die Weite dieſer Eröffnung trage man in ac aus a in m, und ziehe durch m und x eine gerade Linie, ſo wird ſie mit ab parallel ſeyn. Denn weil der Bogen hek die Linie ab berührt, ſo iſt xe auf ab ſenkrecht §§. 98. 99; alſo xe mit am parallel §. 57. I, und durch die Zeichnung auch gleich, und amxe ein Parallelogram, alſo ae mit mx parallel §. 63.

§. 284. Anmerkung. Soll von x auf ac ein Perpendikel gefällt werden; ſo dient die nämliche Auflöſung wie zuvor. Denn, weil amxe ein Parallelogram iſt, und einen rechten Winkel hat, ſo ſind in demſelben lauter rechte Winkel §. 68, folglich xm auf ac ſenkrecht.

§. 285. Anmerkung. Liegt der Punkt, wodurch eine Parallel mit ab gezogen werden ſoll, in einer der Linien ac oder db, ſo geſchieht die Sache noch leichter. Es ſey n der Punkt, wodurch mit ab eine Parallel gezogen

zogen werden ſoll. Man mache ap = bn, ſo wird die Linie durch p und n mit ab parallel ſeyn. §. 63. Auf eben dieſe Art wird aus n auf ac ein Perpendikel gefällt, denn, weil np mit ab parallel iſt, und ab auf ac ſenkrecht iſt, ſo iſt es auch np §. 57. I.

§. 286. Anmerkung. Wenn die Linien ac, bd recht fein gezogen, und genau auf ab ſenkrecht ſind, ſo wird man manches Perpendikel und manche Parallele in folgendem Beyſpiele von der Eintheilung in Gehaue mit Bequemlichkeit ziehen können, ohne ſich immer der gewöhnlichen Arten bedienen zu müßen, und ohne der möglichen Genauigkeit zu nahe zu tretten, wenn ſchon dabey einiges verſuchsweiſe gemacht werden muß.

§. 287. Fig. 163 x ſey der Entwurf einer Waldung, wie man ihn durch eine gehörige Vermeſſung erhalten hat. AE, und BD ſeyen Linien, welche des Gerippes wegen durchgehauen worden ſind. Dieſe Linien

ſchneiden ſich in C, folglich wenn in dem $\triangle$ ABC alle drey Seiten gemeſſen worden ſind, ſo beſtimmt ſich dieſes Dreyeck von ſelbſt.

§. 54. Die Richtung der Linie BD geht, wie man ſieht, durch die Holzwieſe L und den Bruch I, um die Lage dieſer Stücke gegen das Ganze deſto richtiger zu beſtimmen. Da dieſe Linien in der Nähe der Holzwege liegen, welche nach den Ortſchaften Neudorf und Waldhauſen, wie ich ſie nennen will, gehen, ſo können die durchgehauenen Wege ſtatt der vorigen dienen. Ich ſetze, man habe, nachdem man den Wald gehörig vermeſſen, in Grund gelegt, und berechnet hat, nach dem Abzuge alles deſſen, was im Inneren liegt, und nicht zum eigentlichen Waldboden gehört, den Flächeninhalt von 400 Tagwerken, jedes zu 40000 □', gefunden, und beſchloſſen den Wald in 100 gleiche Gehaue zu legen. Dadurch würde die Größe jedes einzelnen Gehaues $= \frac{400}{100} = 4$ Tagwerke $= 1600\ \square^{\circ} = 1600 \times 100 = 160000\ \square' = 4 \times 40000$

$\overset{\square'}{40000}$ ſeyn. Allein ich nehme an, man habe für gut befunden, an zwey verſchiedenen Orten zugleich Gehaue anzulegen, alſo den geſammten Waldboden eigentlich in 200 gleiche Theile zu theilen. Dadurch wird alſo die Groſſe jedes der 200 Theile = 2 Tagwerke = $\overset{\square^{\circ}}{800}$ = $\overset{\square'}{80000}$. Die Gehaue ſollen, wo es möglich iſt, rechtwinklicht ſeyn. Und weil ich vorausſetze, man wolle den Waldboden auf Nadelholz kultiviren, ſo will ich den Schlägen eine Breite von 20° geben. XY ſey die vermöge der Lokalumſtänden und der gefährlichen Winde erforderliche Richtung für die Breite der Schläge. Man überziehe die Figur des Waldes mit einem Netze auf folgende Art. Man fälle von dem äußerſten Punkt p des Umfangs auf XY die unbeſtimmte Perpendikulär pF. Aus G, wo ſie die xy ſchneidet, trage man in XY die Breite der Gehaue von 20° ſo oft auf, als der Wald reicht, und errichte in einem der leztern Theilungspunkte z. B.

H noch eine perpendikulär HK auf XY. In den Perpendikeln FF, KK trage man von G und H aus eine gleiche Weite z. B. von 40° ſowohl über als unter XY, ſo oft auf, bis man über die Grenzen des Waldes hinaus iſt, und ziehe durch die Theilungspunkte die Linien I. I, II. II, III. III, aus den Punkten F, F trage man die Breite der Schläge, oder 20° ſo oft in III. III auf, als es angeht, oder eigentlich der Wald reicht, und ziehe durch die Theilungspunkte wiederum die Linien MM, NN, PP, QQ &c. ſo wird die Figur des ganzen Waldes mit einem Netze von Rechtecken überzogen ſeyn, deren Seiten 20° und 40° ſind. Nun fange man die Theilung folgendergeſtalt bey h an. Alle Linien, die in der folgenden Rechnung unmittelbar angegeben ſind, ſetze ich voraus, ſeyen nach dem der Figur beygefügten Maaßſtabe gemeſſen, und von der angegebenen Größe befunden worden. Der Maaßſtab hält 100°. Die Füße müßen geſchätzt werden.

I.

I. Man fälle in dem Gehaue Nro. 1 aus k auf hm das Perpendikel kn §. 284, ſo iſt in dem Δ hnk die Linie hn $= 13^\circ$ nk $= 17^\circ$; alſo der Inhalt $= \frac{13 \times 17}{2}$ §. 239. $= 110{,}5\ \square^\circ$. Man fälle aus p die perpendikulär pu auf mr §. 284; ſo wird in dem Trapeze nkpu die Linie pu $= 20^\circ$. nk $= 17^\circ$ und nu $= 67^\circ$ gefunden werden; Alſo deſſen Inhalt $= (17+20)\frac{67}{2} = 1239{,}5\ \square^\circ$ §. 245; aber dem Δ hnk fehlen zu $800\ \square^\circ$ noch $800 - 110{,}5 = 689{,}5\ \square^\circ$. Daher muß man nach §. 263 ein Trapeze nklm abſchneiden, das $= 689{,}5\ \square^\circ$ iſt. Ich finde nm $= 38{,}41^\circ$. Die Rechnung aber für nm ſieht ſo aus. Das t §. 263 iſt hier $= 689{,}5\ \square^\circ$, a $= 17$. b $= 20$, p $= 67$. Alſo nm $= \frac{67}{20-17}\left(-17+\sqrt{\frac{2 \times 689{,}5 \times (20-17)}{67}+17^2}\right)$. Aber $\frac{2 \times 689{,}5 + (20-17)}{67} = \frac{1379 \times 3}{67} = 61{,}74$, und $17^2 = 289$. Daher $\sqrt{\frac{2 \times 689{,}5 (20-17)}{67} + 17^2}$

$= \sqrt{289 + 61,74} = \sqrt{350,74} = 18,72$ und $18,72 - 17 = 1,72$. Endlich $\frac{1,72 \times 67}{3} = 38,41 = nm$. Trägt man daher aus n gegen p zu in nu $38,41^{\circ}$ auf, und zieht durch den auf dieſe Art beſtimmten Punkt m die Linie ml mit up parallel §. 283; ſo wird $nkml = 689,5\,\square^{\circ}$ ſeyn; folglich $\Delta\, hnk + nklm = 110,5\,\square^{\circ} + 689,5\,\square^{\circ} = 800\,\square^{\circ}$.

II. In dem Gehaue Nro. 2, weil $nkpu = 1239,5\,\square^{\circ}$ iſt, bleiben nach Abzuge von $689,5\,\square^{\circ}$ noch $550\,\square^{\circ}$. In dem Trapeze pust iſt $pu = 20^{\circ}$. $st = 18^{\circ}$ $us = 14^{\circ}$; alſo deſſen Inhalt $= \frac{38 \times 14}{2} = 266\,\square^{\circ}$. Daher $mlpu + pust = 500\,\square^{\circ} + 266\,\square^{\circ} = 816\,\square^{\circ}$; folglich um $16\,\square^{\circ}$ zu viel. Man muß alſo

auf

auf eben die Art, wie zuvor, ein Trapeze srq abſchneiden, das $= 16\,\square^{\circ}$ iſt. Ich finde sr $= 0{,}84^{\circ}$ nach §. 263.

III. Bey dem Gehaue Nro. 59 iſt rstq $= 16\,\square^{\circ}$. In dem Trapeze stua iſt st $=$ 18° au $= 19{,}9^{\circ}$ sa $= 20^{\circ}$; alſo deſſen Inhalt $(18+19{,}9)\frac{20}{2} = 379\,\square^{\circ}$. In dem $\triangle$ auy iſt au $= 19{,}9^{\circ}$, und ay $= 26^{\circ}$; folglich deſſen Inhalt $19{,}9 \times 13 = 258{,}7\,\square^{\circ}$. In dem $\triangle$ wxy iſt wy $= 20^{\circ}$, und die Höhe x, die man nach §. 44 auf wy fällen kann, $= 14{,}6^{\circ}$ alſo deſſen Inhalt $14{,}6 \times 10 = 146\,\square^{\circ}$, und rqts + stua + $\triangle$ auy + $\triangle$ wxy $= 16+379+258{,}7+146\,\square^{\circ}$ $= 799{,}7\,\square^{\circ}$; oder in einer runden Zahl $800\,\square^{\circ}$.

IV. Bey dem Gehaue Nro. 3 fälle man aus b und c die Perpendikel bg, cf §. 284; ſo iſt in dem $\triangle$ abg, ag = 30,9°, gb = 18°; folglich $\triangle$ abg = 30,9×9 = 278,1 $\square^\circ$. Im Trapeze gbcf iſt gf = 25,5 und fc = 13°; alſo deſſen Inhalt $(13+18)\frac{25,5}{2}$ = 395,25 $\square^\circ$; daher $\triangle$ abg + gbcf = 278,1 $\square^\circ$ + 395,25 $\square^\circ$ = 673,25 $\square^\circ$; und um 126,65 $\square^\circ$ kleiner als 800 $\square^\circ$. In dem Trapeze fc hk iſt fk = 17,4°, kh = 20°, fc = 13°; alſo deſſen Inhalt $(20+13)\frac{17,4}{2}$ = 287,1 $\square^\circ$. Wovon 126,65 $\square^\circ$ abgeſchnitten werden müſſen. Ich finde nach §. 263, daß fe = 8,57° genommen werden müſſe. Trägt man daher aus f in e 8,57°, und zieht durch e die Parallele ed mit kh §. 283, ſo iſt fcde = 126,65 $\square^\circ$; und agb + gbcf + fcde zuſammen = 278,1+395,25+126,65 = 800 $\square^\circ$.

V.

V. Ferner in dem Gehaue Nro. 4 iſt
fchk — fcde = edhk = 278,1 — 126,65
$\square^\circ$
= 160,45 . Folglich fehlen zu edhk noch
$\square^\circ$
800 — 160,45 = 639,55 . Dividirt man
639,55 durch kh = 20°, ſo erhält man nach
§. 278 die Höhe des Parallelograms khxc
= 31,97°. Nimt man daher kc = 31,97°
und zieht cx mit kh parallel, §. 283, ſo iſt
$\square^\circ$
edhk + khxc = 639,55 + 160,45 = 800 .

VI. Weil in dem Gehaue Nro. 5 cx
= 20°, und $\frac{800}{20}$ = 40° iſt, ſo trage man
aus c in e 40°, und ziehe mit cx die Parallele ef §. 283. Da cx × ce = 20 × 40
$\square^\circ$
= 800 iſt, ſo hat cxfe die Größe eines
Gehaues. Auf die nämliche Art ſind die
Gehaue 60, 7, 8, 9, 62, 63, 11, 12, ꝛc. erhalten worden, wie die Figur von ſelbſt zeigt.

VII.

VII. In dem Gehaue Nro. 61 iſt gh $= 26{,}5^\circ$ ga $= 40^\circ$ alſo aghy $= 530\ \square^\circ$. Im Δ hym iſt hy $= 20^\circ$. hm $= 28{,}8^\circ$ alſo deſſen Inhalt $= 288\ \square^\circ$; aber $530 + 288 = 818\ \square^\circ$; daher muß von dem Δ hym ein Δ mkl von $18\ \square^\circ$ abgeſchnitten werden. Ich finde nach § 264 mk $= 7{,}2^\circ$. Denn es iſt hier $t = 18\ \square^\circ$, $p = 28{,}8^\circ$, $b = 20^\circ$; alſo mk $= \sqrt{\frac{2 \times 18 \times 28{,}8}{20}} = 7{,}2^\circ$.

VIII. Im Gehaue Nro. 6 iſt cf $= 7^\circ$ fa $= 20^\circ$, alſo Δ caf $= 70\ \square^\circ$. Ferner fd $= 36{,}5^\circ$, und fa $= 20^\circ$, alſo fabd $= 36{,}5 \times 20 = 730\ \square^\circ$; und $730 + 70 = 800\ \square^\circ$.

IX. Zu dem Gehaue Nro. 65 gehören das Δ mkl + Δ npm + nqtp + Δ ars +

+ rwzu. Die erſten vier Flächen ſind als Dreyecke, und Rechtecke geſucht worden, und das lezte eben ſo, wie in V. bey dem Gehaue Nro. 4 das Rechteck khxc.

X. Zu dem Gehaue Nro. 66 iſt von dem Trapeze ghdc das nöthige Stück g'hge nach §. 263 abgeſchnitten worden.

XI. Bey dem Gehaue Nro. 67 iſt zu dem Trapeze egdc das fehlende Rechteck, wie in V. bey dem Gehaue Nro. 4 geſucht worden.

XII. In dem Gehaue Nro. 82 iſt zu dem Trapeze wfrx, und dem △ dfh das fehlende durch das Rechteck edhn wie in V. bey dem Gehaue Nro. 4 addirt worden, um die 800 □° herauszubringen.

XIII. Weil in dem Gehaue Nro. 70 die Figuren rlnpqu, und kghmda noch nicht

die

die $800^{\square\circ}$ ausmachen, ſo hat man das, was fehlt, durch das Rechteck ayzd hinzugethan, wie in V.

XIV. In dem Gehaue Nro. 15 beträgt das Rechteck plmq ſo viel, als das Dreyeck knl der Wieſe L, wo der Inhalt des Dreyecks knl durch 20 dividirt, die Höhe des ihm gleichen Rechtecks plmq gab. Denn heißt der Inhalt des Dreyecks D, die Höhe des Rechteckes x; ſo muß $D = 20x$, alſo $\frac{D}{20} = x$ ſeyn.

XV. Zu dem Gehaue Nro. 16 gehören awdb + Δ nmw + pnwt, und das kleine Rechteck qpty, welche auf eine ähnliche Art, wie in V. bey dem Gehaue Nro. 4 iſt geſucht worden.

XVI. In dem Gehaue Nro. 20, weil das Rechteck qyae, und die Trapezen eacf, dann fcgh um $18^{\square\circ}$ größer als $800^{\square\circ}$ ſind, ſo

ſo hat man hf bis in z verlängert, und von dem Dreyecke hzg ſo viel abgeſchnitten, daß ein Reſt kdgh = 18 □° blieb, nach §. 280.

XVII. In dem Gehaue Nro. 24 iſt alles auf eine ähnliche Art, wie in XIII. bey dem Gehaue Nro. 70 gefunden, und gemacht worden.

XVIII. In dem Gehaue Nro. 27 iſt das zum Theil krummlinigte Stück axyzgn nach §. 247 geſucht worden, und weil sket + △ etw + axyzgn noch nicht 800 □° ausmacht, das, was fehlte, durch das Rechteck aurn, wie in V. bey dem Gehaue Nro. 4. hinzugethan worden.

§. 288. **Anmerkung.** Der verjüngte Maaßſtab, den ich zur Eintheilung gebrauchte, giebt, wie man ſieht, nur Ruthen an. Wenn alſo die Linien nicht genau etliche ganze Ruthen betrugen, ſo müßten die Füße da-

zu

zu geſchätzt werden. Die Urſache, warum ich die Figur eines Waldes nicht ganz vorſtellte, und einen ſo kleinen Maaßſtab wählte, wird wohl bey einem Lehrbuche Jedermann auffallen, wo es bloß um die Art und Weiſe zu thun iſt, wie man eine Waldung in Schläge theilen kann. Aber bey wirklichen Theilungen ſollte man wohl die Figur in ſo einem Maaßſtabe vor ſich haben, wo ein Fuß mehr oder weniger auf demſelben noch einen bemerkbaren Ausſchlag giebt, wenn man ſich anders eine gehörige Genauigkeit verſprechen will, weil das Schätzen bey allem möglichen Augenmaaße ein zwar nöthiges, aber doch unſicheres Mittel bleibt. Ich habe oben auch deßwegen für den Maaßſtab, womit die Figuren in den Grund gelegt werden, das nämliche gefodert. Man kann ſich bey wirklichen Theilungen des tauſendtheiligen Maaßſtabes bedienen.

§. 289. Iſt der Grundriß in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt, ſo

nehme

nehme man die Beſchreibung zur Hand, und überlege, in welcher Ordnung vermöge der Lokalumſtände die Gehaue abzutreiben ſind. Da es nicht möglich iſt, alles ſo genau und umſtändlich für andere in den Riſſen auszudrücken, oder durch die Beſchreibung anzuzeigen, als man es mit eigenen Augen ſehen kann, ſo kann wohl unſtreitig derjenige, welcher den Wald in Grund gelegt hat, auch denſelben am beſten den Lokalumſtänden gemäß in Gehaue legen, wenn er anders ſonſt die zu dieſen Geſchäften nöthigen Kenntniſſe beſitzt. Um aber doch etwas weniges zu ſagen, ſo nehme ich an, daß die Ordnung der Gehaue durch die Zahlen, welche in denſelben geſchrieben ſind, angedeutet ſey. Weil die Gehaue 3, 6, 7, wie ich vorausſetze, zwar mit einigem jungen Holze, aber von ſchlechter Hofnung beſtanden, meiſtens ausgeleuchtet, und verangert ſind, ſo, daß ohne Menſchenhände da wenig zu hoffen ſteht, ſo haue man ſie gleich zu Anfang weg, und ſuche ſie gehörig zu beſtellen. Die übrigen

Gehaue, welche mit Zahlen von 1 bis 29 bezeichnet ſind, ſetze ich voraus, daß ſie ziemlich wohl und größtentheils mit ſchlagbaren Laubholz beſtanden ſeyn. Die Gehaue 60 bis 74 enthalten, wie ich annehme, Stangenholz, die von 80 bis 84 jungen Anflug und Dickigte von der beſten Hofnung. Sowohl die durchgehauenen Linien, als die ſpäteren Gehaue dienen überall das Holz gehörig auszubringen, daß man das in den Schlägen gefällte Holz über keine noch zu hegende Gehaue abfahren darf.

§. 290. Wenn die Eintheilung auf dem Papiere fertig iſt, ſo frägt ſich, wie man dieſelbe auf der Stelle ſelbſt gehörig ausſtecken könne? Ich nehme an, daß man beſonders die Linien und Durchſchnittspunkte des Gerippes durch tief eingeſchlagene Pfähle oder Markſteine ſorgfältig bey der Ausmeſſung auf der Stelle ſelbſt angemerkt habe. Denn was die Linien am Umfange betrift, ſo ſind dieſelben wenigſtens ſelten unbeſtimmt, weil die

Ei-

Eigenthümer mit Einverſtändniß der Angrenzenden ihre Waldungen gerne ihres eigenen Vortheils wegen, und um unnützen Grenzſtreitigkeiten vorzukommen verlochſteinen laſſen. Hat man alſo ein richtig beſtimmtes Gerippe auf der Stelle ſelbſt, ſind die Grenzen gehörig mit Markſteinen beſetzt, und der Wald in Grund gelegt, ſo durchſchneiden die Richtungslinien FF, MM, NN ſowohl die Linien am Umfange, als jene des Gerippes beſonders die durchgehauenen an mehreren Orten. Hat man ſich alſo z. B. ein Stück, welches zwiſchen FF und QQ liegt, auf ein auf dem Tiſche ausgeſpanntes Papier aufgetragen, ſo ſetze man z. B. den Tiſch über den Punkt am Umfange des Waldes, welcher dem Punkt h auf dem Riſſe entſpricht, und richte ſich in die ihr auf dem Felde korreſpondirende Linie ein. §. 182. Die Linie hy auf dem Tiſche wird ſodann die Richtung der Linie angeben, welche die Gehaue Nro. 1. 2. 59 von den übrigen trennt. Allein, wenn die Linie lange iſt, ſo könnte ein

kleiner Fehler, den man in der Beſtimmung der Linie, welche hn entſpricht, begienge, zu Ende, wo ſie aus dem Walde ſtreicht, groſſe Abweichungen verurſachen, ſo, daß man um einige Ruthen rechts oder links der Linie hinausgelangte, welche abgeſteckt werden ſoll. Um dieſes zu vermeiden, ſetze man den Tiſch auch über den Punkt, welcher l entſpricht, richte lk gehörig in die ihr korreſpondirende Linie ein, §. 182, und laſſe nach lm eine Linie von der Länge abſtecken, die ml gemäß iſt, ſo hat man einen Punkt von der auszuſteckenden Linie, von dem man eben darum verſicherter iſt, weil die Linie, welche lm entſpricht, kürzer iſt, alſo bey einerley Größe des Fehlers in der Stellung des Tiſches weniger irre führen kann. Es verſteht ſich, daß man auf dieſe Art mehrere Punkte der Linie, welche von hy vorgeſtellt wird, aus den Punkten, welche p, t, u &c. entſprechen, beſtimmen könne. Auf eine ähnliche Weiſe laſſen ſich Punkte von der Linie die NN auf dem Felde

kor-

korreſpondirt, angeben. Kömmt man tiefer in den Wald hinein, ſo hat man auf dem Tiſche die Durchſchnittspunkte, welche die Längen der Gehaue mit den durchgehauenen Linien, wie der Riß z. B. in S und R vorſtellt, machen. Da man die Längen von T bis U von U bis W von W bis S auf dem verjüngten Maaßſtabe beſtimmen, und denſelben gemäße Linien in den entſprechenden Linien des Gerippᵹ abmeſſen kann, ſo laſſen ſich allerdings die Durchſchnittspunkte, welche die Längen der Gehaue mit den durchgehauenen Linien machen, und dadurch die Richtungslinien von den Längen der Gehaue leicht angeben. Sind die erſten Richtungslinien, welche MM, NN &c. entſprechen, gehörig ausgeſteckt, und die Gehaue in der feſtgeſetzten Ordnung abgetrieben, ſo dienen dieſelben mit, die folgenden, weil ſie mit jenen parallel ſind, leichter zu beſtimmen, zumal, da man mehrere Punkte hat, die eine etwa fehlerhaft genommene Richtung zu berichtigen dienen. Sind die Richtungslinien

linien von den Längen der Gehaue einmal gehörig beſtimmt, ſo braucht man nur denen des Riſſes gemäße Linien in denſelben abzumeſſen, um die Größe und Grenzen jeder einzelnen Gehaue anzugeben, wenn anderſt nicht das nöthige jährliche Konſumtionsquantum es erfodert, daß man mehr oder weniger Holz abtreibe, als ein einzelnes beſtimmtes Gehau abwirft. §. 273. Ich brauche wohl kaum zu erinneren, daß es weder nöthig iſt, noch wohl gethan ſeyn würde, wenn man die ganze auf dem Papier gemachte Eintheilung auf einmal am Orte ſelbſt in dem Walde ausſtecken wollte. Ohne Zweifel wird man nicht verlangen, daß man die Eckpunkte aller einzelnen Gehaue verlochſteinen ſollte. Denn außer den Koſten, welche ſo ein Unternehmen verurſachen würde, könnte man ſich wenig Hofnung machen, daß die geſetzten Steine, Pfähle oder andere Zeichen nicht nach Verlauf einiger Jahre durch die Zeit ſelbſt, durch Zufälle, oder Menſchenhände ſollten unſichtbar werden. Allein,

wenn

wenn die Förſter nicht ſelbſt im Stande ſind, die Gehaue ihrer anvertrauten Wälder in der Ordnung, wie es die gemachte Eintheilung auf dem Papiere erfodert, auszuſtecken, ſo bleibt dieſes eine ewige Arbeit für Feldmeſſer, die man dazu jährlich abordnen muß, bis man das erſtemal herumkömmt, wenn ſich auch in der Folge die Gehaue durch ihr verſchiedenes Alter und dem Alter angemeſſenen Wuchs hinlänglich unterſcheiden ſollten? — Allerdings: Aber eben darum, ſteht es einem Förſter zu, das was nöthig, zu erlernen, um dieſe Arbeiten ſelbſt verrichten zu können. Wollte man auch auf einmal alle Gehaue abſtecken, ſo würde doch dem Förſter eine Kenntniß von Riſſen nöthig ſeyn, damit er in der Ordnung, nach welcher die ausgeſteckten Gehaue abzutreiben ſind, ſo wie es die Eintheilung auf dem Papiere anzeigt, nicht irrte.

§. 291.

§. 291. Anmerkung. In allen Ländern, welche bey einer ſtärkern Konſumtion wegen Bergweſen, Hüttenweſen ꝛc. oder ſonſt einbrechenden Holzmangel das Bedürfniß die Holzkultur gelehrt hat, ſind die Förſte in Schläge gelegt. Alle Forſtverſtändige rathen dieſes als das einzige Mittel an, einen Wald immerwährend, und ſo viel als möglich zu benützen. Die Gründe, welche dafür ſind, ſind ſo einleuchtend als natürlich. Wenn Eintheilungen in Gehaue etwa in bergigen Gegenden fehlgeſchlagen haben, ſo iſt noch immer die Frage, ob die Gehaue oder die Anlage der Gehaue ꝛc. die Urſachen waren, warum man in der Folge kahle Berge ſahe? Vielleicht hat es an der Richtung der Schläge gefehlt, vielleicht hat man ſie zu breit angelegt, vielleicht von oben herunter getrieben, vielleicht ausgeſtockt, oder ſtatt die Bäume zu fällen, dieſelben umgeriſſen, und dadurch der wenigen tragbaren Erde allen Halt benommen ꝛc. Aber wenn auch die Regel: Man ſoll alle Förſte und Waldungen in

Schlä-

Schläge legen, nicht allgemein ſeyn ſollte, ſo ſind die Ausnahmen ganz gewiß ſehr wenige. Die Grundſäße einer guten Forſtwirthſchaft erheiſchen es alſo, daß man die Wälder ausmeſſe, und in ordentliche Gehaue lege, daß man überdieß die Lage der Förſte in Rückſicht der umliegenden Gegend, Flüßen, Städte ꝛc. und die umliegende Gegend ſelbſt wegen eines ſchicklichen Ausbringen, und des wohlfeilſten Transports kenne, und eben darum, wenn es auch bloße Brouillons zu Erſparung der Koſten ſeyn ſollten, die umliegende Gegend oder wenigſtens das was hieher zu dieſen Abſichten Bezug hat, aufnehme, und beſchreibe. Dann erſt wenn man genaue Plans, und richtige Beſchreibungen von den Wäldern ſelbſt, Bruillons von der Lage der Wälder in Rückſicht der Wege, Straſſen, Bäche, Flüße ꝛc. der umliegenden Gegend hat, iſt man im Stande, alles weſentliche, was in die Holzkultur einſchlägt, zu überſehen, und ſowohl bey jedem einzelnen Wald als im Ganzen gehöri-

hörige den Lokalumſtänden angemeſſene Maaß-regeln zu ergreifen, um die Waldungen auf die beſte Art und auf immer zu benützen.

Von der Lage der Ebenen und den Körpern.

§. 292. Wenn zween Punkte A, C Fig. 164 einer geraden Linie in einer Ebne liegen, ſo befindet ſich die ganze Linie in dieſer Ebene.

Beweis. Wäre ein Theil AC in der Ebene MN, der übrige Theil CB aber nicht, ſo verlängere man AC in der Ebene MN bis in F. Iſt nun CF und CB nicht einerley, ſo iſt AC beyden geraden Linien ACB, und ACF gemein, und der Durchſchnitt zwoer geraden Linien eine Linie wider §. 23. Nro. 9.

67. Satz. Lehrſatz.

§. 293. Jedes geradlinigte Dreyeck abc Fig. 165 befindet ſich ganz in einerley Ebene.

Beweis.

Beweis. Wäre der Theil dce in einer andern Ebene als abed, ſo müßte der Theil ad von der Linie ac in einer anderen Ebene liegen, als dc wider den vorhergehenden Satz.

§. 294. Zuſatz. Drey Punkte beſtimmen die Lage einer Ebene.

68. Satz. Lehrſatz.

§. 295. Wenn ſich zwo Ebenen abcd und efgh ſchneiden, ſo iſt ihr Durchſchnitt eine gerade Linie. Fig. 166.

Beweis. Iſt mn nicht gerade, ſo ziehe man von m nach n in der Ebene abcd die gerade Linie mpn, und in der Ebene efgh die gerade Linie mqn. Zwo gerade Linien würden alſo einen Raum einſchließen wider §. 23. Nro. 8. Folglich muß mn gerade ſeyn.

§. 296. ab Fig. 167 ſey der Durchſchnitt zwoer Ebenen aF, und aG. Man errichte auf dieſem Durchſchnitt aus einem Punkt c deſſelben in beyden Ebenen die Perpendikel cd, ce, ſo iſt dce der Neigungswinkel beyder Ebenen.

§. 297. Zuſatz. Wenn alſo der Neigungswinkel ein rechter iſt, ſo ſtehen die Ebenen aufeinander ſenkrecht.

§. 298. Parallele Ebenen ſind, die, wenn ſie nach was immer für einer Seite erweitert werden, nirgends zuſammen ſtoſſen.

§. 299. Wenn die gerade Linie ab Fig. 168 ſo über den Punkt b einer Ebene MN ſteht, daß ſie mit allen geraden Linien, die in der Ebene MN durch b gehen, rechte Winkel macht, ſo ſteht ſie auf der Ebene MN ſenkrecht.

§. 300. ab ſtehe ſchief gegen die Ebene MN Fig. 169, und be ſey von einem Punkt b der Linie ab auf die Ebene MN ſenkrecht. Man ziehe die Punkte a und e durch eine gerade Linie zuſammen, ſo iſt der Winkel bac der Neigungswinkel der Linie ab gegen die Ebene MN.

§. 301. Ein Priſma iſt ein Körper, der von zwo parallelen, gleichen, und ähnlichen Vielecken, die Grundflächen heißen, und ſo viel Parallelogramen oder Seitenflächen, als die Grundflächen Seiten haben, eingeſchloſſen. Je nachdem die Grundflächen Dreyecke, Vierecke ꝛc. ſind, ſo heißt das Priſma dreyeckigt, viereckigt ꝛc. Sind die Grundflächen Parallelograme, ſo heißt das Priſma ins beſondere ein Parallelepipedum. Stehen die Seitenflächen ſenkrecht auf der Grundfläche, ſo heißt das Parallelepipedum ſenkrecht, außerdem aber ſchief. Sind bey dem ſenkrechten Parallelepipedo die Seiten- und Grundflächen Quadrate, ſo heißt

der

der Körper ein Kubus oder Würfl. Iſt die Grundfläche des Priſma ein Zirkel, ſo heißt es ein Zylinder oder Walze. Man kann ſich die Erzeugung eines Priſma vorſtellen, wenn man ein Vieleck an einer geraden Linie ſich ſo herunter bewegen läßt, daß es ihrer anfänglichen Lage immer parallel bleibt. Der von dem Vielecke beſchriebene körperliche Raum iſt der Raum des Priſma. Die Pyramide hat zur Grundfläche ein Vieleck, zu Seitenflächen aber ſo viel Dreyecke als die Grundfläche Seiten hat, die alle in einem gemeinſchäftlichen Punkte außer der Grundfläche zuſammen laufen. Nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche heißen ſie dreyeckigte, viereckigte ꝛc. Iſt die Grundfläche der Pyramide ein Zirkel, ſo heißt ſie ein Kegel. Die Linie von der Spitze bis zum Mittelpunkt der Grundfläche heißt die Achſe des Kegels. Steht die Achſe des Kegels auf der Grundfläche ſenkrecht, ſo iſt es ein ſenkrechter, ſonſt aber ſchiefer Kegel.

§. 302.

§. 302. Wenn ſich ein Halbkreis um ſeinen Durchmeſſer als eine Achſe herumdreht, ſo erzeugt er eine Kugel, der Umfang aber des Halbkreiſes beſchreibt die Kugelsfläche.

§. 303. Zuſatz. Alſo iſt jeder Punkt der Kugelsfläche von dem Mittelpunkte des Kreiſes, der die Kugel durch ſeine Umdrehung erzeugt, gleichweit entfernt, und zugleich der Kugel Mittelpunkt.

69. Satz. Lehrſatz.

§. 304. Wenn ab Fig. 170 auf zwo Linien cd, ef, die in einer Ebene MN liegen, ſenkrecht iſt, ſo iſt ſie auf der Ebene ſelbſt ſenkrecht.

Beweis. Wenn ab nicht auf die Ebene ſenkrecht iſt, ſo ſey es eine andere z. B. ag. Weil ag als ein Perpendikel auf die Ebene MN auf allen Linien, welche in der Ebene durch g gezogen werden können, ſenk-

recht

recht ſeyn muß, ſo kann der Punkt g in keine von den Linien cd, oder ef fallen, denn ſonſt würde es aus einen Punkt a auf cd oder ef zwey Perpendikel geben, folglich muß g zwiſchen den Linien cd, ef liegen. Zieht man bg, und macht dh auf bg perpendikulär, ſo wird dh wenigſtens eine der Linien cd, oder ef irgendwo in d ſchneiden. Denn $bgd = bgh = 90°$ und $hbd + dbe = 180°$. Wäre nun auch $gbh = gbe = 90°$, ſo könnte doch $gbd < gbe$ kein rechter, folglich bd nicht mit dh parallel ſeyn. Wie ich annehme, ſo iſt ab auf cd, ef, und ag auf die Ebene MN, ferner mh auf bg ſenkrecht. Alſo nach §. 88.

$$adq = abq + bdq.$$
$$abq = agq + bgq.$$
$$bdq = bgq + gdq.$$

Und daraus $adq = agq + bgq + bgq + gdq = agq + gdq + 2\,bgq$. Daher wäre das Quadrat von ad größer als die Qua-

drate

drate von ag und gd zuſammen; folglich agd kein rechtwinklichtes Dreyeck §. 89, das iſt, ag nicht auf die Ebene MN ſenkrecht. Außer ab giebt es daher keine Linie, die aus a auf die Ebene MN ſenkrecht ſeyn könnte.

§. 305. Zuſatz. Wenn eine Linie auf drey Linien ſenkrecht iſt, ſo ſind alle drey in einerley Ebene. Wäre z. B. ab Fig. 170 auf bd, bg, bh ſenkrecht, und bh nicht in der Ebene gbd der zwo andern, ſo giebt es, wenn man durch abb eine Ebene legt, welche die andere durch dbg ſchneidet, entweder unter, oder oberhalb bh eine Linie z. B. bx in der Ebene dbg auf die ab ſenkrecht iſt, vermöge des vorhergehenden Satzes. Alſo würde ſowohl abh, als Etwas das größer oder kleiner als abh wäre = 90°, wider §. 23. Nro. 3. ſeyn.

70. Satz. Lehrſatz.

§. 306. Wenn ab Fig. 171 auf die Ebene MN ſenkrecht iſt, ſo iſt jede Ebene

cdef, welche durch das Loth ab gelegt wird, ebenfalls auf MN ſenkrecht.

Beweis. Man errichte aus b die Linie bg in MN ſenkrecht auf den Durchſchnitt der Ebenen cd, ſo iſt abg der Neigungswinkel §. 296. Da nun ab auf allen Linien die in der Ebene MN durch b gehen, ſenkrecht iſt, ſo iſt abg = 90°, und daher die Ebene cdef auf MN ſenkrecht §. 297.

§. 307. Zuſatz. Wenn man aus einem Punkte m des Durchſchnittes cd auf denſelben in der ſenkrechten Ebene cdef ein Perpendikel mn errichtet, ſo iſt es nicht nur auf cd, ſondern auch auf die Ebene MN ſenkrecht. Man mache mp in MN auf cd ſenkrecht, ſo iſt nmp als Neigungswinkel zwoer ſenkrechten Ebenen = 90°. Aber wie man annimmt, ſo iſt nm auf cd ſenkrecht, folglich auf beyde Linien md, mp alſo auf der Ebene MN ſelbſt. §. 304.

§. 308. Zuſatz. Fällt man aus einem Punkte n der ſenkrechten Ebene cdef auf den Durchſchnitt das Perpendikel nm, ſo wird man durch die nämliche Schlüſſe finden, daß nm auf der Ebene MN selbſt iſt, wenn man, wie zuvor mp in der Ebene NM auf cd ſenkrecht ſetzt.

§. 309. Zuſatz. Wenn ein einziger Punkt n eines Perpendikels auf die Ebene MN, in der auf MN ſenkrechten Ebene cdef liegt, ſo liegt das ganze Perpendikel in derſelben. Denn man fälle von n in cdef auf cd eine Linie ſenkrecht, ſo wird ſie auch auf MN ſenkrecht ſeyn §. 208. Gäbe es aus n noch ein Perpendikel auf MN außer der Ebene cdef z. B. nq, ſo würden in dem Dreyecke nmq zween rechte Winkel ſeyn; wider §. 46.

§. 310. Zuſatz. Der vorige Zuſatz gilt noch, wenn Fig. 172 der Punkt n des Perpendikels auch im Durchſchnitte der aufeinan-

der ſenkrechten Ebenen cd liegen ſollte. Denn errichtet man in der auf MN ſenkrechten Ebene cdef über cd ein Perpendikel nq, ſo iſt nq auch auf MN ſenkrecht, §. 307. Gäbe es aus n noch ein Perpendikel auf MN, und zwar außer der Ebene cdef, ſo ſeye es np. Legt man durch pnq die Ebene ghkl, ſo müßten die Winkel qnk, und pnk beyde rechte Winkel, alſo der Theil dem Ganzen gleich ſeyn, wider §. 23. Nro. 3.

71. Satz. Lehrſatz.

§. 311. I. Wenn zwo Linien ad, bc Fig. 173 auf einer Ebene MN in a und b ſenkrecht ſtehen, ſo ſind ſie parallel; II. und wenn von zwoen Parallelen ad, bc eine auf MN ſenkrecht iſt, ſo iſt es die andere auch.

Beweis. I. Man ziehe die Punkte a und b durch eine gerade Linie zuſammen, ſo iſt cba und dab $= 90°$, weil beyde Linien cb, da auf MN ſenkrecht ſind, alſo die

zween

zween Inneren cba + bad = 180°, und die Linien parallel, §. 57. I. wenn ſie anders in einerley Ebene liegen. Man lege durch die Linie ad und den Punkt b eine Ebene, ſo wird ſie auf MN ſenkrecht §. 306, und von einer ſenkrechten Linie bc ein Punkt b in einer vertikalen Ebene, alſo die ganze Linie bc in derſelben ſich befinden, §. 310. Folglich ſind cb, da in einerley Ebene, und die zween Inneren zween Rechte, alſo dieſe Linien parallel.

II. da ſey auf MN ſenkrecht, und cb mit da parallel. In der Ebene der Parallelen machen dab + cba zuſammen 180°. Weil aber da ein Loth auf MN iſt, ſo iſt dab = 90°. Folglich auch cba. Alſo ſteht cb auf ba ſenkrecht. Ferner muß die Ebene der Parallelen, weil ſie durch das Loth da geht, auf MN ſenkrecht ſeyn, §. 306. Der Durchſchnitt der Ebenen NN und abcd iſt ab. Errichtet man aus b in MN auf ab das Perpendikel bg, ſo iſt cbg als Nei-

gungs-

gungswinkel einer ſenkrechten Ebene = 90°, folglich ſteht cb nicht nur auf ba, ſondern auch auf bg, auf zwo Linien, alſo auf MN ſelbſt ſenkrecht, §. 304.

§. 312. Zuſatz. Wenn eine Linie ab Fig. 174 mit zwo andern cd, ef parallel iſt, ſo ſind die zwo andern ebenfalls parallel unter ſich. Man errichte aus x in den Ebenen abcd, und abef auf ab die Perpendikulären xy, xz, ſo ſteht ax auf xy und xz, folglich auf der ganzen Ebene xyz ſenkrecht, §. 304. Weil nun ſowohl cy als ez mit ax, die ſenkrecht iſt, parallel ſind, ſo ſtehen auch ſie auf der Ebene xyz ſenkrecht, §. 311. II. und ſind parallel, §. 311. I.

§. 313. Zuſatz. Die Winkel bac, edf Fig. 175 ſetze man, öffnen ſich beyde nach einerley Seite. Ferner ſey ab mit de, und ac mit df parallel, ſo wird bac = edf ſeyn. Denn man mache ab = de und ac = df, ſo wird in den Parallelogrammen abed, und acfd, §. 63, ad mit be ſowohl

wohl

wohl als cf parallel und gleich, folglich auch be mit cf parallel und gleich ſeyn, §. 312. Daher iſt auch bcfe ein Parallelogram §. 63, und bc = ef. Alſo △ bac = △ edf § 36, und bac = def.

72. Satz. Aufgabe.

§. 314. Ein Perpendikel ab aus einem Punkte auf eine Ebene MN zu fällen. Fig. 176.

Aufloͤſung. Auf eine willkuͤhrlich in MN angenommene Linie cd ziehe man ae perpendikulaͤr. In der Ebene MN errichte man aus e auf cd die ſenkrechte Linie eh, und faͤlle endlich aus a auf eh das Perpendikel ab, ſo wird ab auf die Ebene MN ſenkrecht ſeyn.

Beweis. Durch das Verfahren der Aufloͤſung iſt ce auf ea ſowohl als eb folglich auf der Ebene des △ eab ſenkrecht. §. 304.

304. Zieht man fg mit cd parallel, ſo wird auch fg auf dem △ eab ſenkrecht ſeyn, §. 311. II. Daher iſt ab auf fg und be folglich auf MN ſelbſt ſenkrecht.

§. 315. Zuſatz. Wäre aus einem gegebenen Punkt in der Ebene MN ein Loth zu errichten, ſo fälle man zuerſt aus einem beliebigen Punkte eine ſenkrechte Linie auf MN, und ziehe durch den gegebenen Punkt mit ihr eine Parallele, ſo wird dieſelbe auf die Ebene MN ſenkrecht ſeyn. §. 311. II.

§. 316. Zuſatz. Man kann nur ein einziges Perpendikel aus einem Punkte auf eine Ebene fällen, und auch nur ein einziges aus einem Punkte einer Ebene auf dieſelbe errichten. Denn gäbe es aus a nebſt ab noch ein Perpendikel auf MN z. B. ax, ſo entſtünde ein △ abx, worinn zween Winkel, jeder ein rechter wären, wider § 46. Und könnte man zwey Perpendikel aus einem Punkte einer Ebene errichten, ſo ließen ſich

durch

durch einen Punkt zwo Parallelen ziehen, wider §. 62.

73. Satz. Lehrſatz.

§. 317. Wenn eine Linie auf zwo Ebenen DE, FG ſenkrecht iſt, ſo ſind dieſe Ebenen parallel. Fig. 177.

Beweis. Stoſſen ſie irgendwo zuſammen, ſo ſchneiden ſie ſich in einer geraden Linie, §. 295. c ſtelle einen Punkt dieſes Durchſchnittes vor. Man ziehe in den Ebenen DE, FG die Linien ca, cb, ſo wird ab auf beyden ſenkrecht ſeyn, wider §. 46.

74. Satz. Aufgabe.

§. 318. Mit einer Ebene MN durch einen Punkt a eine andere parallel zu machen. Fig. 178.

Auflöſung. Man fälle aus a auf MN das Loth ab. Durch b ziehe man in MN

zwo beliebige Linien bc, bd, und mache bey a die Linie ae mit bc und af mit bd parallel, ſo wird die Ebene durch eaf mit MN parallel ſeyn.

Beweis. ab ſteht auf MN und das △ eaf ſenkrecht, alſo ſind beyde Ebenen parallel, §. 317.

75. Satz. Lehrſatz.

§. 319. Zwo parallele Ebenen abcd, efgh machen mit einer dritten MN, Fig. 179 gleiche Neigungswinkel gegen die nämliche Seite.

Beweis. Wenn die Ebenen abcd und efgh einander parallel ſind, ſo ſind es auch ihre Durchſchnitte ab, ef, weil ſonſt die Ebenen ſelbſt zuſammen ſtoſſen, folglich nicht parallel ſeyn würden. ms ſey in MN auf die Linie ab, folglich auch auf die ihr parallele ef ſenkrecht. Durch ms ſetze man die Ebenen

nmpq

nmpq ſenkrecht auf MN, ſo ſind nmp, und qps die Neigungswinkel der Ebenen abcd, efgh gegen MN, §. 296. Da aber mn und pq nicht nur in einer Ebene mnpq liegen, ſondern als Durchſchnitte derſelben mit zwo parallelen Ebenen abcd, efgh nicht zuſammen ſtoſſen können, ſo ſind mn, und pq parallel, folglich nmp = qps, §. 57. II.

Von den Körpern und ihrer Ausmeſſung.

§. 320. Weil ein Priſma erzeugt wird, wenn ſich ein Vieleck an einer geraden Linie ſo herunter bewegt, daß es ſeiner anfänglichen Lage immer parallel bleibt, ſo erhellet daraus ſchon, daß alle Durchſchnitte, die mit der Grundfläche parallel gemacht werden können, gleiche und ähnliche Vielecke ſeyn müßen. So iſt z. B. Fig. 180 efgh mit abcd, oder klmn gleich und ähnlich. Außerdem aber erhellet die Sache ſo: ef und ab ſind Durchſchnitte zwoer parallelen Ebenen

abcd,

abcd, und efgh mit einer dritten aklb, alſo befinden ſie ſich in einer und derſelben Ebene aklb, und können nicht zuſammen ſtoſſen, weil ſonſt die parallelen Ebenen, in denen ſie ebenfalls liegen, auch zuſammen ſtoſſen würden; folglich ſind ab und ef parallelen, und als parallelen zwiſchen parallelen auch einander gleich, §. 64. Eben dieſes gilt von bd und fg, von cd und hg &c. Da nun ab mit ef, und bd mit fg parallel iſt, ſo iſt efg = abd &c. §. 313. Daher ſind in den Vielecken abcd und dfgh die Seiten und Winkel in der nämlichen Ordnung gleich, alſo die Vielecke ſelbſt einander ähnlich und gleich.

§. 321. Sind zwo Seiten ac, bd in der Grundfläche eines Priſma parallel, ſo ſind es auch die Seitenflächen aknc, und blmd, welche über denſelben ſtehen. Wenn dieſe Ebenen irgendwo zuſammen ſtoſſen, ſo ſchneiden ſie ſich in einer geraden Linie, § 295. Es ſey z. B. x ein Punkt dieſes Durchſchnit-

tes.

tes. Man lege durch x eine Ebene exf mit der Grundfläche abcd parallel. Weil der Durchſchnitt der durch x gelegten Ebene mit der Grundfläche ähnlich iſt §. 320, ſo muß eh mit fg eben ſo, wie ac mit bd parallel ſeyn. Könnten alſo die Seitenflächen über ac und bd zuſammen ſtoſſen, ſo müßte dieſes auch den parallelen eh und fg möglich ſeyn.

§. 322. Zuſatz. Bey Parallelepipeden ſind alſo die gegenüberſtehenden Grundflächen parallel, und haben einerley Neigung gegen ihre Grundflächen. §. 319.

76. Satz. Lehrſatz.

§. 323. Parallelepipeden, welche einerley Grundfläche und Höhe haben, ſind gleichen Inhalts.

Beweis. abcd ſey, Fig. 181 und 182, die gemeinſchäftliche Grundfläche zwoer

Pa-

Parallelepipeden abcdefgh = Q, und abcdklmn = P. Weil die beyden Körper einerley Höhe haben, ſo befinden ſich die Grundflächen efgh und klmn in einerley Ebene.

I. Fall. Fig. 181 wo der Parallelepipeden Seitenflächen, welche durch ab und dc gehen, in einer und derſelben Ebene liegen. Ungeachtet man aus der 181ſten Figur von ſelbſt ſieht, daß die Körper afkden und bglchm dreyeckigte Priſmaten ſind, ſo kann dieſes doch auf folgende Art gewieſen werden. Weil ab mit dc parallel iſt, ſo ſind es die durch dieſe Linien gelegten Ebenen bafl und cdem ebenfalls, §. 322, alſo die Ebene der △△ afk, bgl mit demſelben der △△ den, chm parallel. Weil in den Parallelepipeden P und Q, af der de, und ak der dn parallel, und gleich iſt; ſo iſt fak = edn §. 313, und △ fak = △ ecn. §. 25. Folglich ſind die Grundflächen des Körpers afkden, den ich M nennen will, parallel,

gleich

gleich und ähnlich, und eben dadurch die Seitenflächen lauter Parallelograme, §. 63. Ein gleiches läßt ſich für den Körper bglchm, den ich N nennen will, beweiſen. Alſo ſind M und N dreyeckigte Priſmaten, §. 301. Nun liegen aber M und N zwiſchen parallelen Ebenen, ſie haben alſo eine gleiche Höhe. Die Gleichheit ihrer Grundflächen oder der △△ afk, gbl läßt ſich eben ſo, wie in §. 82 beweiſen, ſie haben alſo auch gleiche und ähnliche Grundflächen. Ferner iſt die Seitenfläche dafe von M mit der Seitenflächen bchg von N parallel, §. 322, und eben ſo aknd mit cblm, und haben gegen ihre Grundflächen einerley Neigung. §. 319. Die Seitenflächen fkne von M und hglm von N ſind beyde in einerley Ebene, und haben daher ebenfalls eine gleiche Neigung gegen ihre Grundflächen, die ſich in einerley Ebene befinden. Weil alſo die Grundflächen dieſer dreyeckigten Priſmaten ähnlich und gleich, auch ihre Höhen gleich ſind, überdieß ihre Seitenflächen eine gleiche Neigung

gegen

gegen die Grundflächen haben, ſo kann eines völlig in den Raum des andern geſetzt werden, folglich ſind ſie einander gleich. Nimt man von M und N den beyden gemeinſchäftlichen Raum pgkqhn hinweg, ſo bleiben die körperlichen Räume afgpdehq und bpklcqnm übrig, die alſo gleich ſeyn müßen. Thut man dieſen beyden leztern körperlichen Räumen den Körper apbdqc hinzu, ſo kommen die Parallelepipeden abcdefgh und abcdklmn heraus, die daher einander gleich ſeyn müßen.

II. Fall. Fig. 182. Wenn auch die Seitenflächen von abcdefgh, und abcdklmn die durch ab, cd gehen, in verſchiedenen Ebenen liegen. Man verlängere nk, ml, und ſo auch fg, eh in der Ebene, wo die Grundflächen efgh, und klmn liegen, bis ſie ſich in s, t, u, w ſchneiden, ſo wird bc parallel, und = gh = sw = tu, und eben ſo auch ab parallel und = kl = st = wu ſeyn §. 312. Folglich iſt abcd mit stuw

ähn-

ähnlich und gleich, auch parallel, weil es in der Ebene der Grundfläche efgh, und klmn liegt. Daher iſt abcdstuw = R ein Parallelepipedum, §. 301, und weil ihre Seitenflächen durch ad, bc mit jenen von P, ſo wie die Seitenflächen durch ab, cd mit jenen von Q in einerley Ebene liegen, nach Schlüſſen, wie bey dem erſten Falle, ſowohl dem P als Q, folglich auch Q und P einander gleich.

§. 324. Zuſatz. Parallelepipeden von gleicher Höhe, und gleichen ähnlichen Grundflächen ſind gleich.

§. 325. Zuſatz. Wenn in Q die Seitenflächen ſenkrecht ſind, ſo ſieht man, daß ein ſenkrechtes Parallelepipedum einem ſchiefen von einerley Grundfläche und Höhe gleich ſey.

§. 326. Zuſatz. Betrachtet man Fig. 181 abfg und aklb als die Grundflächen, ſo haben die Parallelepipeden P und Q außer

einer gleichen Höhe zwar gleiche aber nicht ähnliche Grundflächen, und man kann auf die verlangte Art, wie bey dem I. Falle des Satzes allzeit darthun, daß ſolche Parallelepipeden einander gleich ſeyn müßen. Daher, wenn nebſt der Höhe die Grundflächen gleich ſind, ohne eben ähnlich zu ſeyn, ſo ſind die Parallelepipeden gleich.

77. Satz. Lehrſatz.

§. 327. Eine Ebene admk Fig. 180 durch die Diagonalen km, ad der Grundflächen, ſchneidet das Parallelepipedum in zwey gleiche dreyeckigte Priſmaten abdklm und acdknm.

Beweis. Die Grundflächen knm und klm dieſer Priſmaten ſind gleich §. 66; ihre Höhe iſt die Höhe des Parallelepipedums, alſo einerley. Die Seitenflächen durch kn, lm ſind parallel, und haben einerley Neigung gegen ihre Grundflächen. §. 322. Eben

die-

dieſes gilt von den Seitenflächen durch kl, und nm. Endlich iſt die Seitenfläche akmd beyden Priſmaten gemeinſchäftlich. Folglich kann eines völlig in den Raum des andern geſetzt werden, wenn man ſie ſo ineinander ſetzt, daß b in c, ab längſt cd, und bd längſt ca fällt. Sie ſind alſo gleich.

§. 328. Zuſatz. Jedes dreyeckigte Priſma iſt die Hälfte eines Parallelepipedums von einerley Höhe, und nochmal ſo groſſer Grundfläche.

78. Satz. Aufgabe.

§. 329. Ein Parallelepipedum abcdefgh Fig. 183 auszumeſſen, deſſen Grundfläche ein Rechteck iſt, und deſſen Seitenflächen auf der Grundfläche ſenkrecht ſtehen.

Auflöſung. Mit eben demſelben Maaßſtabe am = ap = aq meſſe man die Seiten ab, ad der Grundfläche abcd ſowohl, als

die Höhe ae des Parallelepipedums. Die drey Zahlen, welche anzeigen, wie oft der Maaßſtab in ab, ad, ae enthalten iſt, multiplizire man miteinander, ſo wird das Produkt anzeigen, wie oft der Würfel des Maaßſtabes in dem Parallelepipedo enthalten iſt.

Beweis. In ab laſſe ſich der Maaßſtab mmal in ad nmal, in ae pmal umſchlagen; ſo zeigt mn an, wie viel Quadrate, wie das des Maaßſtabes iſt, in der Grundfläche enthalten ſind. §. 230. Denkt man ſich über jedem ſolchen Quadrate einen Würfel, ſo hat man eine Schichte Würfel, deren Anzahl mn iſt. Man ſieht aber leicht, daß man ſo viel eben ſolche Schichten von Würfeln übereinander ſetzen kann, als vielmal der Maaßſtab in der Höhe ae enthalten iſt. Alſo giebt das Produkt der Zahlen m und n die Anzahl der Würfel jeder Schichte, und das Produkt aus der Anzahl der Würfel jeder Schichte, oder mn in die Anzahl der Schichten = p die Anzahl aller Würfel,

wel-

welche in dem ganzen Parallelepipedo enthalten ſind.

§. 330. Anmerkung. Wenn die Linien ab, ad, ae kein gemeinſchäftliches Maaß haben, und m, n, p ganze Zahlen bedeuten, ſo enthält das Parallelepipedum eine Anzahl von Würfeln = mnp, und noch etwas darüber, aber deſto weniger darüber je kleiner der Maaßſtab iſt. Da nun die Größe des Maaßſtabes willkührlich iſt, ſo verſchwindet dieſer Ueberſchuß, wenn man ihn unendlich klein annimt. Der Satz iſt daher allgemein.

§. 331. Zuſatz. Wenn die drey Seiten ab = a, ad = b, ae = c geſetzt werden, ſo iſt der Inhalt des ſenkrechten Parallelepipedums = abc, und für den Würfel = a^3, weil a = b = c iſt.

§. 332. Zuſatz. Weil jedes ſchiefe Parallelepipedum einem ſenkrechten von gleicher Höhe und Grundfläche gleich iſt, §§. 325.

326, ſo findet man deſſen Inhalt, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt. Wenn daher zwey Parallelepipeden p und P, ihre Grundfläche s und S, ihre Höhen a und A heißen, ſo hat man p : P = as : AS. Iſt s = S oder die Grundflächen gleich, ſo wird p : P = a : A; iſt a = A, oder die Höhen gleich, ſo iſt p : P = s : S. Das iſt, wenn die Grundflächen zweyer Parallelepipeden gleich ſind, ſo verhalten ſie ſich, wie ihre Höhen, und ſind die Höhen gleich, wie ihre Grundflächen.

§. 333. Zuſatz. Der Inhalt eines dreyeckigten Priſmas iſt dem Produkte aus der Grundfläche in die Höhe gleich. Heißt ſeine Grundfläche D, ſeine Höhe a, ſo iſt es die Hälfte von einem Parallelepipedum, deſſen Höhe einerley, und deſſen Grundfläche doppelt ſo groß iſt §. 328, folglich $= \frac{2Da}{2} = Da$.

§. 334.

§. 334. Zuſatz. Jedes vieleckigte Priſma läßt ſich durch die Diagonalen der Grundflächen in mehrere dreyeckigte zertheilen, wie Fig. 284 von ſelbſt zeigt. Die Summe aller dreyeckigten Priſmaten giebt alſo das vieleckigte. Aber da allen dreyeckigten die Höhe des vieleckigten gemeinſchäftlich iſt, ſo findet man alle zuſammen, wenn mann die Summe ihrer Grundflächen, oder die Grundfläche des vieleckigten Priſma mit der allen gemeinſchäftlichen Höhe multiplizirt.

§. 335. Zuſatz. Betrachtet man den Zirkel als ein reguläres Vieleck von unzehlig vielen Seiten, und ſtellt ſich über den kleinen Seiten die kleinen gleichſchenklichten Dreyecke vor, deren gemeinſchäftliche Spitze im Mittelpunkt des Zirkels iſt, ſo kann man den Zylinder Fig. 185 anſehen, als wenn er aus lauter kleinen dreyeckigten Priſmaten beſtünde, die über den kleinen gleichſchenklichten Dreyecken an ſeiner Achſe herumliegen. Man findet alſo den Inhalt aller dieſer kleinen

nen Priſmaten, oder den des Zylinders, wenn man die Grundfläche des Zylinders mit ſeiner Höhe multiplizirt. §. 334.

§. 336. Zuſatz. Wenn von einem Zylinder ein zylindriſcher Raum abcd ausgebohrt iſt, und man ſoll den Inhalt der Röhre oder des noch vollen Theiles finden, ſo berechne man beyde zylindriſche Räume abcd ſo wie mnpq, und ziehe den erſteren von dem letzteren ab; was übrig bleibet, iſt die Röhre. Aber weil die beyden Zylinder einerley Höhe haben, ſo braucht man nur die Krone des vollen Theiles §. 262 mit der gemeinſchäftlichen Höhe dieſer Zylinder zu multipliziren.

§. 337. Zuſatz. Setzt man die Ruthe $= r$, den Fuß $= f$, ſo iſt im zehentheiligen Maaße $r = 10\,f$, und $r^3 = 1000\,f^3$. Folglich hält die Kubikruthe 1000 Kubikfuß. Aus gleichen Gründen hat der Kubikfuß 1000 Kubikzolle, der Kubikzoll 1000 Kubiklinien.

§ 338.

§. 338. Zuſatz. Im zwölftheiligen Maaße iſt $r = 12\,f$, alſo $r^3 = 1728\,f^3$. Folglich hält in dieſem Maaße die Ruthe 1728 Kubikfuß, der Fuß 1728 Kubikzolle ꝛc.

§. 339. Zuſatz. Wenn höheres Maaß auf niedrigeres gebracht werden ſoll, ſo ſchreibe man bey zehentheiligem Maaße die Zahlen, womit Ruthen, Fuße, Zolle, Linien ausgedrückt ſind, in der genannten Ordnung an. Iſt für niedrigere Maaße nichts gegeben, ſo fülle man ihre Stelle mit 3 Nullen aus. Sind aber für niedrigere Maaße nur 1 oder 2 Ziffer gegeben, ſo ſetze man denſelben 2 oder 1 Nulle voraus. So iſt z. B. $2^{c^\circ}\ 25^{c'}\ 6^{c'''} = 2025000006^{c'''}$. Soll im Gegentheile niedrigeres Maaß auf höheres gebracht werden, ſo theile man die Zahl von der Rechten zur Linken in Klaſſen, jede zu 3 Ziffern; jede folgende Klaſſe wird ſodann die Menge Einheiten des nächſt höheren Maaßes angeben. So iſt z. B. $3456707893^{c'''}$

=

$= 3^{c^\circ}, 456^{c'}, 707^{c''}, 893^{c'''}$. Der Beweis kann hier auf eine ähnliche Art geführt werden wie in §. 236 bey dem Quadratmaaße, nur daß hier mit 1000 multiplizirt oder dividirt werden muß.

§. 340. Zuſatz. Die Seitenflächen der Priſmaten ſind Parallelograme. Sucht man alſo den Flächeninhalt jeder dieſer einzelnen Parallelograme, und addirt ſie zuſammen, ſo hat man den geſammten Inhalt aller Seitenflächen, zu welchen man noch die beyden Grundflächen hinzuthun muß, wenn man die ganze Fläche haben will, welche das Priſma umgiebt. Da die Grundflächen Vielecke ſind, ſo laſſen ſie ſich nach §. 241 berechnen.

§. 341. Zuſatz. Betrachtet man den Zirkel als ein Vieleck von unzählig vielen Seiten, ſo kann man ſich bey einem ſenkrechten Zylinder über jeder kleinen Seite des Umfangs als Grundlinie ein Rechteck vorſtellen, deſſen Höhe die Seite des ſenkrechten

Zylin=

Zylinders iſt, wie z. B. Fig. 185 mqxy. Man findet daher den Flächeninhalt aller dieſer kleinen Rechtecke, oder die Seitenfläche des ſenkrechten Zylinders, wenn man die Peripherie der Grundfläche mit der Seite des Zylinders multiplizirt.

79. Satz. Lehrſatz.

§. 342. Man theile eine Seite bc des $\triangle$abc Fig. 186 in ſo viel gleiche Theile be = eg = gk = km = mp &c. als man will, und ziehe durch die Theilungspunkte die Linien ed, gf, kh &c. parallel mit der Grundlinie, ſo werden dieſe Linien in dem Verhältniſſe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 ꝛc. wachſen.

Beweis. Weil die Linien de, fg, hk &c. mit der Grundlinie ac parallel ſind, ſo ſind die $\triangle\triangle$ bde, bfg, bhk &c. ähnlich. §. 125. Alſo iſt

ed : gf = be : bg = 1 : 2.

ed : kh = be : bk = 1 : 3.

ed : lm = be : bm = 1 : 4 &c.

Folglich gf = 2 ed, bk = 3 ed, lm = 4 ed &c. alſo wachſen dieſe Linien in dem Verhältniſſe der naturlichen Zahlen, oder wie 1, 2, 3 ꝛc.

80. Satz. Lehrſatz.

§. 343. Jeder Durchſchnitt, welcher mit der Grundfläche einer Pyramide parallel geſchieht, iſt der Grundfläche ähnlich.

Beweis. I. FG Fig. 187 ſowohl als BC liegen in der Ebene des △ BDC, zugleich aber auch in den parallelen Ebenen EFG, ABC; folglich ſind FG und BC parallel. Eben dieſes gilt von EF und AB. Daher iſt EFG = ABC. §. 313. Durch ähnliche Schlüſſe iſt FEG = BAC, alſo das △ ABC ∽ △ EFG. §. 127.

II.

II. Wenn man eine vieleckigte Pyramide, indem man durch die Diagonalen der Grundfläche, und die Spitze Ebenen legt, in in mehrere dreyeckigte zertheilet, ſo ſind die Durchſchnitte aller dreyeckigten Pyramiden in gleicher Höhe mit ihren Grundflächen ähnlich. Nro. I. Folglich auch die Durchſchnitte der vieleckigkten. §. 136.

§. 344. Zuſatz. Man fälle von der Spitze der Pyramide ein Loth DK auf die Grundfläche ABC. Von G und C ziehe man nach den Punkten H und K, wo das Loth in den Ebenen EFG, ABC eintrift, die Linien GH, CK, ſo wird das $\triangle$ HDG $\backsim \triangle$ KDC ſeyn, weil der Winkel bey D beyden Dreyecken gemeinſchäftlich, und bey H und K rechte Winkel ſind. §. 123. Daher iſt DG : DC = DH : DK. Weil aber FG mit BC parallel iſt, ſo ſind auch die $\triangle\triangle$ GDG, BDC ähnlich, §. 125, folglich DG : DC = FG : BC. Daraus folgt DH : DK = FG : BC, und DHq : DKq

=

$= FGq : BCq$ §. 170 Rechenk. $= \triangle EFG : \triangle ABC$. §. 251. Daher iſt $DHq : DKq = \triangle EFG : \triangle ABC$, und $DHq = \frac{DKq \times \triangle EFG}{\triangle ABC}$ alſo $DH = DK \sqrt{\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}}$. Dadurch läßt ſich die Entfernung DH des Durchſchnittes EFG von der Spitze D angeben.

§. 345. Zuſatz. Wenn man DC in mehrere gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspunkte Parallelen mit der Grundlinie zieht, ſo wachſen ſie nach §. 342 wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ꝛc. die Durchſchnitte aber, woron ſie die Seiten ſind, wie die Quadrate dieſer Zahlen, oder wie 1, 4, 9, 16 ꝛc. §. 151. Setzt man daher den Durchſchnitt zunächſt an der Spitze = 1. Die ganze Höhe der Pyramide = p, ſo iſt deſſen Entfernung von der Spitze $= p \sqrt{\frac{1}{\triangle ABC}}$.

81. Satz.

81. Satz. Lehrſatz.

§. 346. Jede dreyeckigte Pyramide kann man ſich vorſtellen als wenn ſie aus einer Menge aufeinander liegenden Priſmaten von unendlich kleiner Höhe beſtünde. Fig. 188.

Beweis. Man theile die Seite FA in etliche gleiche Theile FG = GB = BA. Durch die Theilungspunkte mache man mit der Grundfläche parallele Durchſchnitte, und ſtelle ſich über denſelben Priſmaten vor. Einige davon, wie DGNQBK werden in der Pyramide, andere aber, wie XGREBP um die Pyramide beſchrieben ſeyn. Die Körper HG, XK, IM geben den Ueberſchuß der um die Pyramide beſchriebenen Priſmaten über diejenigen an, welche in derſelben beſchrieben ſind, und machen zuſammengenommen das Priſma IBSZAC aus. Denn HG = DB §. 324. Alſo HG + XK = DB + XK = XB = EA, und IA = EA + IM = HG + XK + IM = IBSZAC. Da man ſich nun AF in ſo viel gleiche Theile eingetheilt

vor-

vorſtellen kann, als man will, und alſo AB kleiner, und die parallelen Durchſchnitte näher gedacht werden können, als Jemand im Stande iſt anzugeben, ſo kann auch die Höhe des Priſma über ACZ, und das Priſma IBSZAC ſelbſt, folglich der Ueberſchuß aller Priſmaten die um die Pyramide beſchrieben ſind, über diejenige, welche darinn beſchrieben ſind, kleiner werden, als ſich angeben läßt. Kann aber der Ueberſchuß der umſchriebenen Priſmaten über die eingeſchriebenen kleiner werden, als ſich angeben läßt, ſo gilt dieſes von der Pyramide noch viel mehr, weil ſie zwar gröſſer als die Summe aller eingeſchriebenen, aber kleiner iſt, als die Summe aller Priſmaten die um dieſelbe beſchrieben werden können.

82. Satz. Lehrſatz.

§. 347. Den körperlichen Inhalt einer Pyramide erhält man, wenn man das Produkt aus ſeiner Grundfläche in ſeine Höhe durch 3 dividirt.

Be-

Beweis. Man theile eine Seite DC der Pyramide Fig. 187 in eine Menge gleiche Theile, und lege durch die Theilungspunkte parallele Ebenen. Die Durchſchnitte, welche dadurch entſtehen, werden alle der Grundfläche ähnlich ſeyn. §. 343. Ihre Seiten werden in dem Verhältniſſe der natürlichen Zahlen, §. 342, die Durchſchnitte ſelbſt aber in dem Verhältniſſe der Quadraten dieſer Zahlen wachſen. §. 252. Denkt man ſich die Menge der Durchſchnitte unendlich groß, ſo iſt die Summe der Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten, welche in der Ebene des $\triangle BDC$ liegen $= \frac{1}{3}(BC)^3$. §. 212. Rechenk. Nun wachſen die Durchſchnitte in dem Verhältniſſe der Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten, §. 345, alſo die Quadratwurzeln aus dieſen Durchſchnitten in dem Verhältniſſe der Seiten ſelbſt. Folglich wenn die Grundfläche B heißt, ſo muß die Summe aller Durchſchnitte $= \frac{1}{3}(\sqrt{B})^3 = \frac{1}{3}\sqrt{B} \times \sqrt{B} \times \sqrt{B} = \frac{1}{3} B \sqrt{B}$ ſeyn. Stellt man ſich die Pyramide nach §. 346

als eine Menge übereinander liegender Priſmaten von gleicher, aber unendlich kleiner Höhe vor, ſo darf man die Summe aller ihrer Grundflächen, das iſt, aller Durchſchnitte nur mit ihrer gemeinſchäftlichen Höhe multipliziren, um die Summe aller kleinen Priſmaten, das iſt, den körperlichen Inhalt der ganzen Pyramide zu haben. Dieſe gemeinſchäftliche Höhe iſt $= p\sqrt{\frac{1}{B}}$ §. 345, wo p die Höhe der Pyramide anzeigt, folglich die Pyramide $= \frac{1}{3} B \sqrt{B} \times p \sqrt{\frac{1}{B}} = \frac{1}{3} Bp$.

§. 348. Zuſatz. Iſt die Grundfläche abcd Fig. 189 ein Vieleck, ſo kann man die Pyramide abcde in ſo viel dreyeckigte abde, bdec zertheilen, die alle in einer gemeinſchäftlichen Spitze e zuſammen laufen, als ſich aus einem der Eckpunkte z. B. d in der Grundfläche Diagonalen ziehen laſſen.

Da

Da die Grundflächen der dreyeckigten alle in einer Ebene liegen, ſo giebt es auf dieſelbe aus e nur ein Loth ep, §. 316, ſie haben daher eine gemeinſchäftliche Höhe, und man findet den Inhalt aller, wenn man die Summe aller Dreyecke, oder den Inhalt des Vielseckes abcd mit der gemeinſchäftlichen Höhe ep multiplizirt, und das erhaltene Produkt durch 3 dividirt.

§. 349. Zuſatz. Der Kegel Fig. 190 kann als eine Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche ein Vieleck von unzählig vielen Seiten iſt. Man findet alſo deſſen Inhalt ebenfalls, wenn man das Produkt aus ſeiner Grundfläche in ſeine Höhe durch 3 dividirt.

§. 350. Zuſatz. DK Fig. 187 ſey das Loth aus der Spitze der Pyramide auf ſeine Grundfläche. Man durchſchneide die Pyramide mit der Grundfläche parallel in H, ſo heißt das Stück der Pyramide zwiſchen

der Grundfläche ABC und dem Durchſchnitte EFG eine abgekürzte Pyramide. Nach §. 344 iſt DHq : DKq = △ EFG : △ ABC, alſo DH : DK = √EFG : √△ ABC § 170 Rechenk. Es ſey △ EFG = m^2 = S, und △ABC = n^2 = B. Die Höhe aber der abgekürzten Pyramide HK = KD — HD = q. So wird DH : DK = m : n ſeyn; folglich

$$DK - DH : DH = n - m : m.$$

$$DK - DH : DK = n - m : n.$$

§. 160. III. Rechenk.

Weil nun DK — DH = q geſetzt wird, ſo iſt $DH = \frac{mq}{n-m}$ und $DK = \frac{nq}{n-m}$. Alſo die Pyramide $ABCD = \frac{nq}{n-m} \times \frac{n^2}{3} = \frac{qn^3}{3(n-m)}$ die Pyramide $EFGD = \frac{mq}{n-m} \times \frac{m^2}{3} = \frac{qm^3}{3(n-m)}$ §. 347, und die abgekürzte Pyramide = ABCD — EFGD =

$$= \frac{qn^3}{3(n-m)} - \frac{qm^3}{3(n-m)} = q\frac{(n^3-m^3)}{3(n-m)}$$

aber $\frac{n^3-m^3}{n-m} = n^2 + mn + m^2$, wenn man nach §. 103 Rechenk. dividirt. Folglich iſt die abgekürzte Pyramide $= \frac{q}{3}(m^2+n^2+mn) = \frac{q}{3}(S+B+\sqrt{BS})$ welches man mit Worten ſo ausdrücken kann.

I. Man multiplizire die beyden Grundflächen miteinander, und ziehe aus dem Produkte die Quadratwurzel: zu dieſer

II. Addire man beyde Grundflächen der abgekürzten Pyramide, und

III. Multiplizire die Summe Nro. II. mit der Höhe der abgekürzten Pyramide.

IV. Endlich dividire man das Produkt Nro. III. durch 3. Was herauskömmt, iſt

der

der körperliche Inhalt der abgekürzten Pyramide.

§. 351. Zuſatz. bd Fig. 190 ſey die Achſe des Kegels. Man durchſchneide den Kegel parallel mit der Grundfläche in f, und ziehe von der Spitze b nach einem beliebigen Punkt e in der Peripherie der Grundfläche eine Linie be, ſo liegen gf und ed in der Ebene des △ebd, und zugleich in zwo parallelen Ebenen, folglich ſind ſie parallel, alſo die △△ bgf, bed ähnlich, §. 125, und bd : bf = ed : gf, woraus $gf = \frac{bf \times ed}{bd}$ folgt. Weil aber bf, ed, bd einerley ſind, man mag den Punkt e in der Peripherie der Grundfläche annehmen, wo man will, ſo iſt f von jedem Punkte g im Umfange des Durchſchnittes gleichweit entfernt, und daher jeder mit der Grundfläche parallele Durchſchnitt ein Kreis. Man nenne den Radius des Durchſchnittes r, jenen der Grundfläche R, ſo iſt der Flächeninhalt des Durchſchnitts

ſchnittes πr^2, und die Grundfläche πR^2, §. 258, folglich, wenn die Höhe $kl = q$ geſetzt wird, ſo wird der körperliche Inhalt des abgekürzten Kegels $= \frac{q}{3}(\pi r^2 + \pi R^2 + \sqrt{\pi r^2 \pi R^2}) = \frac{\pi q}{3}(r^2 + R^2 + rR)$ §. 350, oder weil $R^2 + r^2 + Rr = (R+r)^2 - Rr$ iſt, ſo wird der abgekürzte Kegel $= \frac{\pi q}{3}((R+r)^2 - Rr)$. Heißen die Diameter ſeiner Grundflächen D und d, ihre Peripherien p und P, ſo iſt $r = \frac{d}{2} = \frac{p}{2\pi}$, und $R = \frac{d}{2} = \frac{P}{2\pi}$, §. 255, alſo wenn man ſtatt R und r die Werthe ſetzt, der abgekürzte Kegel $= \frac{\pi q}{3}\left(\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 - \frac{Dd}{4}\right)$ $= \frac{\pi q}{12}((D+d)^2 - Dd)$ oder auch $= \frac{\pi q}{3}$ $\left(\left(\frac{P+p}{2\pi}\right)^2 - \frac{Pp}{4\pi^2}\right) = \frac{\pi q}{12\pi^2}$

$$((P+p)^2-Pp) = \frac{q}{12\pi}((P+p)^2-Pp).$$

Weil aber $\frac{\pi}{12} = \frac{3,1415}{12}$ beynahe $= 0,2618$

und $\frac{1}{12\pi} = 0,02652$ iſt, ſo verwandeln ſich die letztern Ausdrücke des abgekürzten Kegels in $0,2618\, q((D+d)^2-Dd)$, und $0,02652\, q((P+p)^2-Pp)$.

§. 352. Zuſatz. Die Seitenflächen der Pyramiden ſind Dreyecke, und die Grundflächen Vielecke, man kann alſo ihren Inhalt nach §§. 239. 241 finden.

§. 353. Zuſatz. Wenn ſich das rechtwinklichte Dreyeck abc Fig. 191 um ſeine Achſe ab dreht, ſo erzeugt es durch ſeine Bewegung den ſenkrechten Kegel dbc, die Seite bc aber deſſen Seitenfläche. Jeder Punkt m oder n von der Peripherie der Grundfläche ſteht daher gleichweit von der Spitze des Kegels b ab. Folglich, wenn man die

Grundfläche als ein reguläres Vieleck von unzählig vielen Seiten betrachtet, ſo kann man ſich die Seitenfläche des ſenkrechten Kegels, als lauter aneinander liegende kleine, gleiche und gleichſchenklichte Dreyecke vorſtellen, wovon die unendlich kleinen Seiten des Zirkels als Vieleck von unzählig vielen Seiten betrachtet, die Grundlinien, die Entfernung aber von der Spitze b die allen dieſen kleinen Dreyecken gemeinſchäftliche Höhe iſt. Man findet aber die Fläche von jedem ſolchen kleinen Dreyecke, wenn man ſeine kleine Grundlinie mit ſeiner Höhe multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt, §. 239, alſo den Flächeninhalt aller zuſammen, wenn man die Summe aller ihrer Grundlinien, das iſt, die Peripherie der Grundfläche des Kegels mit ihrer gemeinſchäftlichen Höhe, welche die Seite dieſes Kegels iſt, multiplizirt, und das erhaltene Produkt durch 2 dividirt.

§. 354. Zuſatz. Wenn man den ſenkrechten Kegel dbc mit der Grundfläche parallel

rallel ſchneidet, ſo hat man den ſenkrechten abgekürzten Kegel defc. Stellt mbn eines von den kleinen Dreyecken vor, welche nach dem vorhergehenden §. um den ſenkrechten Kegel liegen, und ſeine Seitenfläche ausmachen, ſo wird man leicht gewahr, daß man die Fläche eines ſenkrechten abgekürzten Kegels als lauter aneinander liegende kleine Trapezen wie mnxy betrachten könne, wovon die zwo kleinen Seiten mn und xy parallel, ihre Entfernung aber der Seite des abgekürzten Kegels de gleich iſt. Man findet ein ſolches kleines Trapeze, wenn man die Summe der kleinen parallelen Seiten mn und xy mit der Seite des abgekürzten Kegels multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt, §. 245; alſo die Summe aller dieſer kleinen Trapeze, wenn man die Summe aller kleinen parallelen Seiten aller Trapezen, das iſt, die beyden Peripherien der Grundflächen zuſammennimt, ihre Summe mit der Seite des abgekürzten Kegels multiplizirt, und was herauskömmt, durch 2 dividirt.

83. Satz.

83. Satz. Lehrſatz.

§. 355. Die Kugelsfläche iſt dem Produkte aus dem Diameter der Kugel in ſeine Pheripherie gleich.

Beweis. amb Fig. 192 ſey ein Halbkreis, eg eine Tangente, und eg, hd ſenkrecht auf dem Diameter ab. Wenn ſich der Halbkreis um ſeinen Diameter ab als eine Achſe dreht, ſo beſchreibt die Peripherie des Halbkreiſes aeb die Kugelfläche, de aber die Fläche eines ſenkrechten abgekürzten Kegels. Je kleiner man de nimt, deſto weniger wird ed von em, ſo wie auch das Stück der Kugelsfläche, welches em erzeugt, von der Fläche des abgekürzten Kegels, welche ed beſchreibet, abweichen, und verſchieden ſeyn. Setzt man ed kleiner als ſich angeben läßt, ſo wird auch die Abweichung, und der Unterſchied der beyden genannten Flächen kleiner werden, als ſich angeben läßt. Wenn man nun annimt, das e und d unedlich nahe aneinander liegen, ſo iſt der

Unter-

Unterſchied der Linien ge, und hd, welche die Radien von den Grundflächen des abgekürzten Kegels ſind, den gedh beſchreibt unendlich klein. Man darf alſo ge = hd ſetzen, ohne um etwas zu fehlen, das ſich angeben ließe. Iſt das Verhältniß des Diameters zur Peripherie = 1 : π, ſo ſind die Peripherien der Radien ge und hd jede = $2\pi \times$ ge §. 255. Folglich ihre Summe = $4\pi \times$ ge, und die Fläche des kleinen abgekürzten Kegels, welche ed erzeugt = $2\pi \times$ ge $\times$ ed. §. 354. Man fälle ef ſenkrecht auf hd, ſo werden die $\Delta\Delta$ cge, efd ähnlich ſeyn. Denn gec + cef = 90° = cef + fed §. 98, alſo gec = fed. Ferner ſind bey g und f rechte Winkel, alſo dieſe Dreyecke ähnlich. §. 123. Daher iſt ge : ce = ef : ed und ed = $\frac{ce \times ef}{ge}$. Die abgekürzte kleine Kegelsfläche, welche ed erzeugt, war = $2\pi \times$ ge $\times$ ed, folglich, wenn man ſtatt ed deſſen Werth = $\frac{ce \times ef}{ge}$ ſetzt, ſo erhält

man

man dieſelbe $= \frac{2\pi \times ge \times ce \times ef}{ge} = 2\pi \times ce \times cf$.
Weil aber ce der Radius der Kugel iſt, ſo iſt $2\pi \times ce$ die Peripherie des Kugeldiameters §. 255, folglich das Produkt aus der Peripherie des Kugeldiameters in die kleine Höhe des abgekürzten Kegels der Seitenfläche deſſelben gleich. Weil man ſich nun die Kugelsfläche vorſtellen kann, als wenn ſie aus lauter ſolchen kleinen abgekürzten Kegelsflächen beſtünde, ſo findet man die Summe von allen den kleinen abgekürzten Kegelsflächen, welche die Kugel umgeben, oder die Kugelsfläche, wenn man die Summe aller ihrer Höhen, das iſt, den Diameter der Kugel mit ſeiner Peripherie multiplizirt.

§. 356. Zuſatz. Der Radius der Kugel ſey $= r$, ſo iſt die Peripherie $= 2\pi r$, und die Kugelfläche $= 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$. Die Fläche eines Kreiſes von dem Radius r iſt $= \pi r^2$ §. 258. Folglich iſt die Kugelfläche viermal ſo groß als eine Zirkelsfläche, wenn

wenn Kugel und Zirkel einerley Radius oder Diameter haben.

84. Satz. Lehrſatz.

§. 357. Der körperliche Inhalt einer Kugel iſt $\frac{1}{3}$ des Produkts aus der Kugelfläche in den Radius der Kugel.

Beweis. Weil der Kugel Mittelpunkt von allen Punkten der Kugelfläche gleichweit, und ſo viel als der Radius beträgt, entfernt iſt, ſo kann man ſich die Kugel vorſtellen, als beſtünde ſie aus lauter ſehr kleinen aneinander liegenden Pyramiden, deren Grundflächen zuſammen die Kugelfläche ausmachen, und wovon der Kugel Mittelpunkt die allen dieſen kleinen Pyramiden gemeinſchäftliche Spitze, alſo die Höhe aller dieſer Pyramiden der Radius iſt. Jede ſolche kleine Pyramide kann man nach §. 347 finden, wenn man ihre kleine Grundfläche mit dem Radius der Kugel als der Höhe der

Pyra-

Pyramide multiplizirt, und das Produkt durch 3 dividirt, folglich die Summe aller dieſer kleinen Pyramiden, oder den Inhalt der Kugel ſelbſt, wenn man die Summe aller Grundflächen, aller kleinen Pyramiden, das iſt, die Kugelfläche, mit der gemeinſchäftlichen Höhe derſelben, dem Radius multiplizirt, und was herauskömmt durch 3 dividirt.

§. 358. Zuſatz. Wenn $1 : \pi$ das Verhältniß des Diameters zur Peripherie ausdrückt, und der Radius der Kugel r heißt, ſo iſt $2r$ der Kugel Diameter, $2\pi r$ ihre Peripherie, §. 255, $4\pi r^2$ die Kugelfläche, §. 356, und daher $4\pi r^2 \times \frac{r}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$ der körperliche Inhalt der Kugel.

§. 359. Zuſatz. Setzt man den Diameter der Kugel $= d$, ſo iſt $r = \frac{d}{2}$ und r^3

=

$$= \frac{d^3}{8} \text{ alſo } \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi d^3}{3 \times 8} = \frac{4\pi d^3}{24} = \frac{\pi d^3}{6}.$$

§. 360. Den Raum einer Holzklafter kann man ſich als ein ſenkrechtes Parallelepipedum vorſtellen. Gemeiniglich iſt die Höhe und Breite von 6 Fuß, die Tiefe aber, welche der Scheiterlänge gleich iſt, iſt 6 bis 4 Fuß, auch geringer. Man theilt die gefällten Stämme, ſo weit ſie eine beträchtliche Dicke haben, entweder vermittelſt der Axt, oder beſſer mit der Säge in Klippel von der Länge der Scheite, und dieſe durchs Spalten in Scheite ſelbſt. Die Menge der Scheite, welche den Raum der Klafter füllen, heißen eine Holzklafter. Das, was von dem Stamme nicht zu Scheitern geſpalten wird, heißt Gipfelholz, oder Obholz, wovon die ſtärkeren Aeſte das ſogenannte Prügelholz, der Reſt oder das Reiſig aber die Waaſen, Wellen, oder Bauſchen geben.

Der

Der Raum einer Holzklafter iſt daher leicht zu finden. Man beſtimme die Breite, Höhe, und Scheiterlänge nach dem landesüblichen Fußmaaße, ſo wird das Produkt der drey Zahlen, welche die Breite, Höhe und Scheiterlänge anzeigen, die Anzahl der Kubikfuſſe geben, welche der Raum der Klafter enthält. Z. B. wenn die Höhe und Breite der Klafter 6 Fuß, und die Scheiterlänge ebenfalls 6 Fuß iſt, ſo iſt der körperliche Raum einer Klafter $= 6 \times 6 \times 6 = 216$ Kubikfuß. Wäre die Scheiterlänge nur 4 Fuß, ſo kömmt für dieſen Raum $6 \times 6 \times 4 = 144^{c'}$ heraus.

§. 361. Jedermann weiß, daß, wenn das Holz in Klaftern aufgeſetzt wird, zwiſchen den Scheitern leere Räume entſtehen. Je kleiner überhaupt die Scheiter ſind, deſto mehr betragen dieſe leeren Zwiſchenräume. Aber das, was am Holze deßwegen bey der Klafter abgeht, hat man geſucht auf folgende Art zu erfahren. Man maß und berechnete zuerſt die Klippel, zerſchlug ſie ſodann

in Scheite, und ſetzte von denſelben eine Klafter auf, um zu ſehen, wie viel geſpaltene Klippel und Scheite nöthig wären, den Raum der Klafter zu füllen. „Auf dieſe „Art hat man gefunden, ſagt Vierenklee „Seite 435 ſeiner mathematiſchen Anfangs- „gründe, daß man zu einer dergleichen ſechs- „ſchuhigen Klafter Holz 190 bis 200 Ku- „bikfuß (ungeſpaltenen Holzes) nachdem die „Scheiter klein geſpalten, oder grob gelaſ- „ſen worden, hat nehmen müßen.“ Vierenklee nimt hievon das Mittel, oder $\frac{190+200}{2}$ $= \frac{390}{2} = 195^{c'}$ §. 150 Rechenk. und ſchließt, weil ſeine Klafter 6′ hoch, breit und tief war, daß der Abgang am Holze durch die leeren Zwiſchenräume im Mittel $216' - 195' = 21^{c'}$ ſey. Hr. Oettelt machte ſeine Verſuche mit $3\frac{1}{2}$ſchuhigen Scheitern, ſeine Klafter hatte daher $126^{c'}$. Er fand im Mittel für die leeren Zwiſchenräume $16^{c'}$. Bey Vierenklee iſt alſo der Abgang $\frac{21}{216} = \frac{7}{72}$ des Ganzen. Bey Oettelt $\frac{16}{126} = \frac{8}{63}$ vom Ganzen. Bey-

de

de Brüche auf Dezimalbrüche gebracht, geben 0,097 und 0,127, wovon das arithmetiſche Mittel = 0,112 iſt, welches auf $1000^{c'}$ am Abgang $112^{c'}$ giebt. Daraus läßt ſich für jede Klafter, wenn ihr Inhalt in Kubikfußen gegeben iſt, der Abgang wegen der leeren Räume zwiſchen den Scheitern finden. Da dieſer Abgang $112^{c'}$ auf $1000^{c'}$, und 1000 — 112 = 888 iſt, ſo verhält ſich der Klafterraum zum Inhalt des Scheiterholzes, welches ihn füllt, wie 1000 : 888, oder was einerley iſt, $888^{c'}$ Scheiterholz füllen $1000^{c'}$ Raum, oder auch 888 Klafter Stammholzes geben 1000 Klafter Scheiterholzes. Daher iſt der Abgang, wenn die Klaftern verſchieden ſind, in dem Verhältniſſe der Kubikfuſſe, welche auf dieſelben gehen, oder wenn nichts als die Längen der Scheiter verſchieden ſind, in dem Verhältniſſe der Scheiterlängen. §. 332. Z. B. die Breite und Höhe der Klafter ſey = 6'. Bey einer Klafter ſeyen die Scheiter 6', bey

einer andern $3\frac{1}{2}'$ lang. So ſind ihre Inhalte $216^{c'}$ und $126^{c'}$. Folglich, wenn der Abgang wegen der leeren Zwiſchenräume bey der ſechsſchuhigen Klafter nach den gemachten Verſuchen $21^{c'}$ iſt, ſo fragt es ſich, wie groß wird derſelbe für die andren ſeyn? Es iſt $216 : 126 = 21 : x$, und $x = \frac{21 \times 126}{216} = 12{,}25^{c'}$. Alſo wäre der Abgang wegen der leeren Räume bey der $3\frac{1}{2}$ſchuhigen Scheiterlänge $12{,}25^{c'}$. Oder weil die Abgänge auch in dem Verhältniſſe der Scheiterlängen ſtehen, ſo iſt $6' : 3\frac{1}{2} = 21 : x$, und $x = \frac{3\frac{1}{2} \times 21}{6} = \frac{7 \times 21}{2 \times 6} = \frac{147}{12} = 12{,}25^{c'}$. Wie zuvor.

§. 362. Die Anzahl der Füße von der Breite einer Klafter, die $= k$ ſeyn ſoll, ſey $= b$, von der Hohe $= h$, von der Scheiterlänge $= l$. Der Fuß ſelbſt, wodurch alles ausgedrückt wird, ſey $= f$. Eine andere Klafter

ſetze

ſetze man $=K$, und die mit den vorigen gleich⸗namigen Größen B, H, L, F. So iſt $k = bhlf^3$, und $K = BHLF^3$, folglich $k:K = bhlf^3 : BHLF^3$. Und $K = \frac{kBHKF^3}{bhlf^3} = \frac{BHL}{bhl}\left(\frac{F}{f}\right)^3 k$.

§. 363. Iſt im vorhergehenden §. $f = F$, oder das Fußmaaß einerley, ſo iſt $k:K = bhl : BHL$, und $K = \frac{BHL}{bhl}k$.

§. 364. Das, was in beyden letzten §§. beygebracht worden iſt, kann dienen, Klafter, wo die Breite, Höhe, Länge verſchie⸗den ſind, oder auch Klafter, wo die Fuß⸗maaße verſchieden ſind, miteinander zu ver⸗gleichen. Z. B. die Breite und Höhe einer Klafter ſey $= 6'$. Die Scheiterlänge $= 4'6''$. Eine andere Klafter iſt nach eben dem Fuß⸗maaße $6'3''$ breit und hoch, und $4'8\frac{1}{4}''$ lang. Es fragt ſich, wie viel Klafter der erſtern

Gat⸗

Gattung jede $= k$ eine gewiſſe Menge der letztern z. B. 5000, jede $= K$ geſetzt, ausmachen? Es iſt hier $b = h = 6'$. $l = 4' 6''$. $B = H = 6' 3''$, $L = 4' 8\frac{1}{4}''$. Alſo alles in Zollen ausgedrückt : 1 K $= \frac{75 \times 75 \times 225}{4}$ k : $72 \times 72 \times 54$, und 5000 K $= \frac{75 \times 75 \times 225 \times 5000}{4 \times 72 \times 72 \times 54}$ k $= 5000 \left(\frac{25}{24}\right)^3$, wenn alles gehörig reduzirt wird. §§. 40. 41. Rechenk.

Oder die Breite und Höhe zwoer Klafter k und K ſey $= 6'$. Ihre Länge $4'. 6''$. Die Fußmaaße von k und K verhalten ſich, wie 24 : 25. Es fragt ſich, wie viel k, geben 5000 K? Dadurch iſt $f : F = 24 : 25$ und $\frac{F}{f} = \frac{25}{24}$. Folglich, weil hier $b = h = B = H$, und $l = L$ iſt, ſo wird $K = k \left(\frac{F}{f}\right)^3 = \left(\frac{25}{24}\right)^3 k$. Alſo $5000\ K = 5000 \left(\frac{25}{24}\right)^3 k$. Es iſt dieſes Beyſpiel aus Hofr. Käſtners Anfangsgründen der Geometrie, 4te und vermehrte Auflage Seite 368, entnommen,

men, wo der Herr Hofrath Nro. X am angezogenen Orte ſagt: „Es iſt (dieſes Exem„pel) verſchiedenen Rechnern vorgelegt wor„den, und ſie haben, wie in Herrn Beck„manns ökonomiſcher Bibliothek berichtet „wird, verſchiedene Facit herausgebracht. „Was mögen das für Rechner geweſen ſeyn? „Und was für Herrn, die ſich unterſtan„den, Forſtweſen, Faktoreyweſen u. d. gl. „zu regieren, und ſo was nicht ſelbſt be„rechnen konnten?“

§. 365. „Der Holzmacher, ſagt Herr „Oettelt, Seite 67, dritte Auflage, wenn er „an einem ſteilen Berge eine Klafter legt, „ſteckt den Pfahl yz Fig. 193 perpendiku„lär ein, und giebt ihm das Maaß von 6 „Schuhen. Hierauf mißt er an dem ſchie„fen Berge 6 Schuhe, nämlich von z bis „u, und ſteckt den andern Pfahl ux. Zwi„ſchen dieſe Pfähle legt er die Klafter, und „man bekömmt eine Klafter Holz in ſchiefen „Winkeln gelegt. Man glaubt die Klafter

„xyuz

„ xyuz ſey ordentlich abgemeſſen, denn ſie „ hat 6 Schuhe in der Höhe, und in der „ Weite, wie jene, ſo auf der Ebene liegt.“ Herr Oettelt ſchlägt vor, man ſolle einen Pfahl um von 6′ ſo auf die Schiefe des Berges uz ſtecken, daß er mit derſelben oder uz einen rechten Winkel mache, und die Klafter ſo viel höher ſetzen, als qm beträgt. Steht die Klafter auf ebenem Boden, Fig. 194 ſo iſt uz horizontal, ux perpendikulär, und uxyz ein Quadrat, alſo deſſen Inhalt = 36 Quadratfuß. Nun hat in dem Parallelograme unpz Fig. 193 die Grundlinie uz ſechs Fuß, und die Höhe um ebenfalls 6′. Folglich iſt unpz = uz × um = 36 Quadratfuß, folglich eben ſo groß als Fig. 194 uxyz auf dem ebenen Boden. Sind die Seitenflächen der Klafter, welche durch xu, yz gehen, und wo man die Scheiter nach ihrer Länge ſieht, Rechtecke; ſo iſt, wenn die Klafter als ein Parallelepipedum, und die Vorderfläche der Klafter als die Grundfläche betrachtet wird, die Scheiterlänge die Höhe.

Sind

Sind alſo die Vorderflächen nach dem Vorſchlage des Herrn Oettels einander gleich gemacht, ſo hält die Klafter, welche auf dem ebenen Boden ſteht, und die an dem Abhange eines Berges gleich viel Holz. Wenn aber weder die Vorderflächen, wo man die Enden der Scheiter erblickt, noch die Seitenflächen, wo man die Scheiter ihrer Länge nach gewahr wird, Rechtecke ſind, ſo iſt es noch nicht genug, wenn man nach Herrn Oettels Vorſchlage die Vorderfläche ſo viel erhöhet, bis ihr Inhalt $= 36$ Quadratfuß wird, weil ſodann die Scheiterlänge, wenn man die Klafter ſelbſt als ein Parallelepipedum, und die Vorderfläche als Grundfläche betrachtet, nicht als die Höhe dieſes Körpers angeſehen werden kann, die in dieſem Falle kleiner als die Scheiterlänge iſt. Setzt man die Höhe und Breite einer Klafter einander gleich, und beyde $= a$. Die Scheiterlänge aber $= l$. Die Diagonal der Vorderfläche $= D$, die Diagonal der Seitenfläche $= d$. So iſt der körperliche Inhalt einer jeden Klafter, die

ein

ein rechtwinklichtes oder ſchiefes Parallelepi-pedum vorſtellt $= \frac{D}{4a} \sqrt{(2a+D)(2a+-D)}$ $\sqrt{(a+d+l)(d+l-a)(a+l-d)(a+d-l)}$. Sind die Seitenflächen Rechtecke, die vordere und hintere Flächen, Rauten; ſo wird der Inhalt $= \frac{lD}{2} \sqrt{(2a+D)(2a-D)}$. Sind die vordere und hintere Flächen Quadrate, die Seitenflächen Rauten, ſo iſt der Inhalt $= \frac{a}{2} \sqrt{(a+d+l)(d+l-a)(a+l-d)(a+d-l)}$. Steht die Klafter auf ebenem Boden, und ſtellt ſie ein rechtwinklichtes Parallelepipedum vor, ſo iſt der Inhalt $= aal$. Dieſe Ausdrücke könnten dienen, die körperlichen Inhalte der Klafter in verſchiedenen Lagen, wie ſie gewöhnlich von den Holzhauern, beſonders an Abhängen, und in bergigten Gegenden aufgeſetzt werden, zu berechnen, und miteinander zu vergleichen. Allein, da ich in der Ausübung keinen beſondern Nutzen davon abſehe, ſo entübrige ich mich ihres Bewei-

wei=

weiſes. Was ſich vorzüglich für die Ausübung daraus herleiten läßt, beſteht darinn, daß man den Klaftern eine ſolche Lage geben muß, in welcher die Seitenflächen, woran man die Scheite ihrer Länge nach erblicket, Rechtecke machen, wenn man ſich bey ſchiefwinklichten Vorderflächen mit der Vorſchrift des Herrn Oettetls helfen will.

§. 366. Gerade und wohlgewachſene Baumſtämme gleichen, wenn man ſie da, wie gewöhnlich, wo ihre Dicke noch 6 bis 4 Zoll beträgt, abſägt, ſo ziemlich abgekürzten Kegeln. Oft ſind ſie bis auf eine beträchtliche Höhe von gleicher Dicke, und beynahe zylindriſch. Vierenklee, Seite 445 ſagt, ein Baum wäre ſo zu reden, das Mittelding zwiſchen einer Walze und einem abgekürzten Kegel. In dieſer Rückſicht nimt er das arithmetiſche Mittel zwiſchen beyden Peripherien am Zopf und Stammende, ſucht daraus die demſelben zugehörige Zirkelsfläche, und multiplizirt ſie mit der Höhe des Stammes.

Was

Was herauskömmt, iſt nach ihm der eigentliche Inhalt eines Stammholzes. Setzt man den Unterſchied beyder Diameter am Zopf und Stammende $= u$ die Länge des Stammes $= q$, das Verhältniß des Diameters zur Peripherie, wie $1 : \pi$; ſo iſt das, was nach Vierenklee herauskömmt, um $\frac{\pi q u^2}{48}$ kleiner, als das, was man erhält, wenn man den Stamm als einen abgekürzten Kegel anſieht und berechnet. Hätte Vierenklee nicht die mittlere arithmetiſche Peripherie, ſondern die mittlere Zirkelsfläche zwiſchen der am Zopf und Stammende geſucht, ſo würde allerdings etwas herausgekommen ſeyn, das dem Zylinder über der Grundfläche am Stammende um $\frac{\pi q u^2}{24}$ näher käme, als der abgekürzte Kegel, anſtatt daß ſeine Vorſchrift etwas giebt, das um $\frac{\pi q u^2}{48}$ kleiner iſt, als der abgekürzte Kegel. Nach ihm findet man daher etwas, das zwiſchen dem abgekürzten Ke-

gel, und einem Zylinder über die Zirkelsfläche am Zopfende liegt. Vermuthlich hat Vierenklee eine bloße Erleichterung der Rechnung zur Abſicht gehabt. Einige nehmen zwiſchen beyden Grundflächen ein Mittel, multipliziren daſſelbe mit der Länge, und nehmen das, was herauskömmt, für den Inhalt eines Baumſtammes an.

85. Satz. Aufgabe.

§. 367. Baumſtämme, die ſich als Zylinder, oder als abgekürzte Kegel betrachten laſſen, zu berechnen.

Auflöſung. Als Zylinder können ſie nach §. 335, als abgekürzte Kegel nach §. 351 berechnet werden. Will man zwiſchen beyden Grundflächen ein Mittel nehmen, und daſſelbe mit der Länge multipliziren, ſo hat die Rechnung eben ſo wenig Schwierigkeit. Nach der Vorſchrift des Vierenklee ſucht man für die mittlere arithmetiſche Peripherie

zwi-

zwiſchen den beyden Peripherien am Zopf und Stammende die zugehörige Zirkelsfläche, und multiplizirt ſie mit der Länge.

I. Bey zylindriſchen Stämmen mißt man die Länge derſelben, und entweder die Diameter oder Umfänge der Grundflächen. Es ſey die Länge $= l$. Der Diameter $= d$, ſo iſt die Zirkelsfläche $= 0{,}7853d^2$ §. 259. Alſo der Inhalt des Zylinders $= 0{,}7853d^2l$ §. 335. Iſt ſtatt dem Diameter d die Peripherie p gegeben, ſo ſey das Verhältniß des Diameters zur Peripherie $= 1 : \pi$, wegen $\pi : 1 = p : d$, und $\frac{p}{\pi} = d$, iſt $\frac{p}{4\pi} \times p = \frac{p^2}{4\pi}$ die Zirkelsfläche §. 257. Aber $\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4 \times 3{,}1415} = \frac{1}{12{,}566} = 0{,}07957$. Alſo die Zirkelsfläche $= 0{,}07957p^2$, und der Inhalt des zylindriſchen Stammholzes $= 0{,}07957p^2l$.

Exempel.

Exempel. Die Länge ſey 20′. Der Diameter 16″. Wenn man alles auf Zolle bringt, ſo iſt der körperliche Inhalt $= 0,7853 \times 16 \times 16 \times 200 = 40^{c'}, 207^{c''}, 36$ oder $40^{c'}, 207^{c''}, 360^{c'''}$. Denn $\frac{36}{100}{}^{c''} = \frac{360}{1000}{}^{c''} = 360^{c'''}$. §. 337. Nimt man ſtatt 0,7853 nur 0,785, welches bey Holzberechnungen genau genug ſeyn mag, ſo kömmt $40^{c'}, 192^{c''}$, alſo um $15,36^{c''}$ weniger heraus.

Zweytes Exempel. Die Länge ſey abermal 20′. Der Umfang aber der Grundfläche 50″, ſo iſt $0,07957 \times 50 \times 50 \times 200 = 39^{c'}, 785^{c''}$. Nimt man 0,0796 ſtatt 0,07957, ſo kömmt $39^{c'}, 800$, alſo um $15^{c''}$ zu viel heraus, welches bey dergleichen Rechnungen als etwas unbeträchtliches angeſehen werden kann.

II.

II. Betrachtet man einen Stamm als einen abgekürzten Kegel, ſo ſind außer der Länge entweder die Diameter, oder die Umfänge der Grundflächen gegeben. Wenn die Diameter bekannt ſind, ſo iſt der Inhalt §. 351 $= 0{,}2618q\,((D+d)^2 - Dd)$ und wenn die Umfänge gegeben ſind $= 0{,}02652q\,((P+p)^2 - Pp)$.

Erſtes Exempel. Ein Stamm Holzes iſt 40′ lang, die Diameter am Zopfe und Stammende ſind 6″ und 18″. Bringt man alles auf Zolle, ſo iſt der Inhalt $0{,}2618 \times 400\,((24)^2 - 6 \times 18) = 0{,}6218 \times 400 \times 468 = 49^{c'}, 008^{c''}, 960^{c'''}$.

Zweytes Exempel. Der Umfang am Zopfe ſey 19″, am Stammende 55″. Die Länge wie zuvor 40′. So iſt der Inhalt $0{,}02652 \times 400 \times ((19+55)^2 - 19 \times 55)$ $= 0{,}02652 \times 400 \times 4431 = 47^{c'}, 904^{c''}, 048^{c'''}$.

III. Wenn die Diameter der Grundflächen d und D, ihre Peripherien p und P ſind, ſo ſind die Zirkelsflächen wie in Nro. I. $0,7853d^2$, und $0,7853D^2$, oder $0,0796p^2$, und $0,0796P^2$, folglich die mittlere arithmetiſche Zirkelsfläche zwiſchen beyden Grundflächen entweder 0,7853

$$\left(\frac{d^2+D^2}{2}\right) = 0,3926\,(d^2+D^2),$$ oder

$$0,0796\left(\frac{p^2+P^2}{2}\right) = 0,0398\,(p^2+P^2).$$

Exempel. In dem vorigen Beyſpiele Nro. II. ſind die Diameter der Grundflächen von 6 und 18 Zollen. Alſo die mittlere arithmetiſche Zirkelsfläche $= 0,3926\,(6^2+18^2)$

$$= 141,372\,\square''.$$ Die Länge war $40' = 400''$, alſo iſt $141,372 \times 400 = 56^{c'}, 548^{c''}, 800^{c'''}$, der körperliche Inhalt des Stammes, wenn man das Produkt aus der arithmetiſchen mittleren Zirkelsfläche in die Länge dafür annimt.

Auf eine ähnliche Art läßt ſich die Rechnung anſtellen, wenn die Umfänge gegeben ſind.

IV. Wenn die Peripherien am Zopfe und Stammende p und P ſind, ſo iſt die arithmetiſche mittlere Peripherie $= \frac{P+p}{2}$ §. 149 Rechenk. und $0{,}0796 \left(\frac{p+P}{2}\right)^2$ Nro. I. $= 0{,}0199\,(P+p)^2$, die derſelben zugehörige Zirkelsfläche.

Exempel. Die Umfänge am Zopfe und Stammende ſeyen $19''$, und $55''$. Die Länge des Stammes $40'$. So iſt der Inhalt nach Vierenklee $0{,}0199\,(74)^2 \times 400 = 43^{c'}$, $588^{c''}$, $960^{c'''}$.

§. 368. Anmerkung. Muhlwellen, Naaben, und Achſenhölzer laſſen ſich als Zylinder anſehen und berechnen.

Exempel.

Exempel. I. Wenn eine Welle 30′ lang iſt, und 42″ im Diameter hält, ſo iſt ſein Inhalt 3,1415 × 21 × 21 × 300 §. 335, = $415^{c'}, 620^{c''}, 450^{c'''}$.

Exempel. II. Wenn ein Stück Holzes zu einer Achſe 10″ im Diameter hat, und 9′ = 90″ lang iſt, ſo kömmt für deſſen Kubikinhalt 3,1415 × 25 × 90 = $7^{c'}, 068^{c''}, 375^{c'''}$.

Exempel. III. Der Inhalt eines Naabenholzes von 22″ Länge, und 18″ im Diameter iſt 3,1415 × 81 × 22 = $5^{c'}, 598^{c''}, 153^{c'''}$.

Multiplizirt man in allen drey Exempeln das Quadrat vom Diameter der Grundfläche mit 0,7853, und noch mit der Länge, ſo kömmt ohngefähr eben der Inhalt heraus. §. 367. Nro. I.

§. 369. Anmerkung. Ich habe bey den bisherigen Rechnungen das Verhältniß des Diameters zur Peripherie etwas genauer genommen. Wenn der Inhalt einzelner Stämme geſucht wird, ſo mag es allerdings zureichen, wenn man dafür 3,14 nimt, beſonders, wenn die Stämme keine beträchtliche Länge haben. Denn die Abſicht die Holzpreiſe nach der Anzahl der Kubikfuße anzugeben, erfodert wohl keine ſchärfere Beſtimmungen.

§. 370. Anmerkung. Wenn man die Länge der Stämme, welche als abgekürzte Kegel betrachtet werden, meſſen will, ſo mißt man eigentlich die Seite ab Fig. 195. Die Höhe des abgekürzten ſenkrechten Kegels aber iſt ac. Weil das $\triangle$ acb bey c rechtwinklicht iſt, ſo wird $ac = \sqrt{abq - bcq}$ §. 88, aber $bc = be - ce = be - ad$, weil $ad = ce$ iſt. §. 64. Es ſey $ad = 3''$ $be = 9''$. $ab = 400''$. So iſt $ac = \sqrt{400^2 - 6^2} = \sqrt{160000 - 36} = \sqrt{159964} = 39{,}995$, alſo

alſo ab nicht völlig um 0,005 von ac verſchieden, welches bey dergleichen Rechnungen außer Acht gelaſſen werden kann.

§. 371. Anmerkung. Wenn die Grundflächen der Baumſtämme keine Kreiſe ſondern länglichtrunde Figuren ſind, Fig. 196, ſo kann man zwiſchen dem kleinſten Durchmeſſer cd, und dem größten ab, ein arithmetiſches Mittel nehmen, und deſſen Kreisfläche für die länglichtrunde Fläche gelten laſſen. Einige ſehen dieſe länglichtrunde Figuren als Ellipſen an, und nehmen ſtatt eines arithmetiſchen mittlern Diameters die Quadratwurzel aus cd × ab für den ſogenannten äquirten Diameter an. Wenn etwas daran gelegen wäre, die Fläche adbc etwas genauer zu erhalten, ſo könnte man ein Brett an dieſelbe halten, und mit einem Bleyſtift an dem Umfange adbc herumfahren, dadurch die krummlinigte Figur adbc auf dem Brette abzeichnen, und nach §. 247 berechnen.

§. 372.

§. 372. Anmerkung. Es iſt die Frage, wie ſich die Inhalte von krummgewachſenen Baumſtämmen, von Bäumen, die ſich in einer Höhe von wenig Fuſſen in mehrere Stämme, oder auch ſtärkere verworren gewachſene Aeſte zertheilen finden laſſen? Soll man ſie nach bloſſem Augenmaaße ſchätzen? Oder ſoll man diejenigen Theile davon, die ſich als Zylinder oder abgekürzte Kegel betrachten laſſen, inſonderheit beſtimmen, und den Reſt allein vermittelſt des Augenmaaßes ſchätzen? — Wie berechnet man das ſogenannte Gipfelholz? Darf man z. B. mit Vierenklee als etwas auf Erfahrung gegründetes annehmen, daß auf 6 Klafter Scheiterholzes eine vom Gipfelholz gerechnet werden könne? — Man meſſe und berechne, was ſich nach dem bisher Gelehrten meſſen und berechnen läßt. Denn erſt, wenn einige Stücke ſo beſchaffen ſind, daß ſie ſich nach keiner der gegebenen Vorſchriften beſtimmen laſſen, nehme man ſeine Zuflucht zum Augenmaaße, aber man ſuche ſich eben durch fleißiges Meſſen, Berechnen,

und

und öftere Vergleichungen desjenigen, was man ausgemeſſen hat, mit dem, was die Rechnung gab, ein gutes richtiges Augenmaaß zu erwerben.

§. 373. Beſchlagene Stämme, welche zu ordentlichen vierkantigten Balkenſtücken gehauen ſind, können zuweilen als Priſmen betrachtet, oder wenn ſich ihre Seitenflächen gehörig verlängert in einem Punkte x Fig. 197 vereinigen, als abgekürzte Pyramiden angeſehen, und nach §§. 328. 347 berechnet werden. Endiget ſich der behauene Stamm in einer Linie xy Fig. 198, ſo iſt dieſes eine Art von Keile. Es ſtelle Fig. 199 einen behauenen Stamm vor. abcd und efgh ſeyen parallele Rechtecke, und auf hdcg ſenkrecht. Man lege die Ebene fmpg durch fg mit eadh, und die Ebene eklf durch ef mit hdcg parallel, ſo zerlegt ſich der behauene Stamm abcdefgh in das Parallelepipedum efghknpd, in die dreyeckigten Priſmaten eakfmn und fnlgpc, und endlich noch in die viereckigte Pyramide

fmbln.

fmbln. Betrachtet man hdpg als die Grundfläche des Parallelepipedums, ſo iſt jede von den 4 Eckſeiten gf, he, pn, dk die Höhe deſſelben, und auch die Höhe des dreyeckigten Priſma fnlgpc, weil efgh und knpd ſenkrechte Rechtecke ſind. §. 307. Wenn man hdpg mit einer Eckſeite z. B. fg multiplizirt, ſo erhält man das Parallelepipedum efghknpd, §. 329, dividirt man den körperlichen Inhalt des Parallelepipedums durch ekdh oder fnpg, ſo erhält man die Höhe für das dreyeckigte Priſma eakſmn. Das Parallelepipedum nochmal durch efgh oder knpd dividirt, giebt die Höhe der Pyramyde fmbln. Ich habe hier nur ein Beyſpiel von Zerlegung der beſchlagenen Stämme in Priſmaten und Pyramiden geben wollen, und halte mich deßwegen dabey nicht auf, weil es nicht ſcheint, als wenn man bey dem Forſtweſen die Inhalte der beſchlagenen Stämme gar ſo genau zu kennen brauchte. Aber wenn man ſich mit einem Inhalt, den das Produkt aus der

Län-

Länge der beſchlagenen Stämme in die mittlere Proportionalfläche an beyden Stammenden giebt, nicht begnügen wollte, ſo müßte man ſie allerdings zerlegen. Man ſehe hierüber die Anmerkung des Herrn Hofrath Käſtners Seite 394, vierte Auflage.

§. 374. Giebt man einem Stück Holzes eine ſolche Figur, daß ſich ſelbiges leicht meſſen und berechnen läßt, ſo kann man die Schwere eines Kubikfuſſes ohngefähr ermeſſen, und dadurch, wenn die behauenen Stämme von der nämlichen Holzart ſind, auch ihr Gewicht beynahe beſtimmen, wenn man ihre körperliche Inhalte kennt. Denn das Gewicht eines Kubikfuſſes mit der Anzahl der Kubikfuſſe eines Stammholzes multiplizirt, giebt das ganze Gewicht deſſelben. Dadurch läßt ſich die Laſt eines Transports beſtimmen. Ich enthalte mich hier die eigentlichen Schweren von verſchiedenen Holzarten irgendwo auszuſchreiben.

§. 375. Wenn man den Inhalt unbeſchlagener Stämme mit dem von beſchlagenen vergleicht, ſo läßt ſich der körperliche Inhalt der Abfälle und Späne überſchlagen.

§. 376. Der wirkliche Preis des Holzes als Waare betrachtet, richtet ſich auf Märkten allerdings nach der kleineren oder größeren Menge des vorhandenen Holzes, der Größe der nöthigen Konſumption, der Nachfrage, der innerlichen Güte des Holzes, der Leichtigkeit des Transportes, der Jahrszeit, der Witterung, dem Zuſammenfluße der Käufer und Verkäufer ꝛc. Alle dieſe Umſtände, die an dieſem oder jenem Orte zu verſchiedenen Zeiten obwalten, beſtimmen die Größe des Holzpreiſes. Indeſſen fodert es die Billigkeit, beſonders, wo eine Ordnung in den Förſten eingeführt iſt, wo man gehauweis Holz ſchlägt, und wo auf der Stelle ſelbſt in den Schlägen Holzmärkte gehalten werden, daß, wer von der nämlichen Gattung Holz doppelt ſo viel bekommt, auch

dop-

doppelt ſo viel bezahle, und daß man daher die Preiſe ſowohl bey dem Brenn- als Bau- und Nutzholz nach dem Verhältniſſe der Quantitäten Holzes, und der Anzahl der Kubikfuſſe beſtimme. Was ſich etwa im allgemeinen in Rückſicht des Preiſes einigermaſſen feſtſetzen ließe, wäre das Verhältniß der Preiſe für eine gleiche Menge Kubikfuſſe Brenn- Bau- und Nutzholzes. Wenn nach Vierenklee z. B. der Kubikfuß weiches Brennholz 3 Pf. gilt, und der vom harten 4 Pf., ſo könnte nach ihm das Bauholz vom weichen 6 Pf. und vom harten 8 Pf. gelten. Wäre es Nutzholz, ſo glaubt er den Preis des Kubikfuſſes von weichem 9 Pf. vom harten 11 Pf. bis 1 Gg. zu 12 Pf. ſetzen zu dürfen. Weiches Blochholz aber wäre ſodann um 1 Gr. hartes um 1⅓ Gr. zu verkaufen, wenn es in der Nähe aus den Waldungen geholt werden kann. Müßte man es aber weit herholen, ſo glaubt er, daß es billig ſey, bey dem Werkholz ſowohl als Nutz- und Blochholz 1 bis 2 Pf. weniger für den Ku-

bik-

bikfuß zu fodern. Dadurch verhielten ſich die Preiſe von einem Kubikfuße Brenn- Bau- Nutz- und Blochholz wie 1 : 2 : 3 : 4. Die Preiſe eines Kubikfuß weichen und harten Holzes aber wie 3 : 4.

§. 377. Dividirt man den Preis einer Klafter Brennholz durch die Anzahl der Kubikfuſſe, welche auf dieſelbe gehen, ſo kennt man den Preis eines Kubikfuſſes Brennholz. Das Doppelte, Dreyfache, Vierfache deſſelben ſind die Preiſe eines Kubikfuſſes Bau- Nutz- und Blochholzes. Z. B. die Scheite seyen $3\frac{1}{4}$ Fuß lang, alſo die Klafter 117 Kubikfuſſe. Der Preis der Klafter weichen Brennholzes komme in einem Forſte mit Einſchluß des Hauerlohns ohne Transport auf 1 Gulden zu ſtehen, ſo iſt $\frac{60}{117}$ Kr. = $\frac{240}{117}$ Pf. = 2,05 Pfenninge, oder in einer runden Zahl 2 Pf. der Preis eines Kubikfuſſes von weichem Brennholz. Verhält ſich der Werth des weichen zum Werth des harten wie 3 : 4, ſo iſt ſodann der Preis eines Kubik-

bikfuſſes harten Holzes = $\frac{8}{3}$ Pf. Daher wäre nach den obigen angenommenen Verhältniſſen der Preis des Kubikuſſes

	Brenn	Bau	Nutz	Blochholz.
Beym weichen Holz	2 Pf.	4	6	8
Beym harten Holz	$2\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	8	$10\frac{2}{3}$

§. 378. Man ſchätzt die Dinge gemeiniglich nach dem Nutzen, den ſie uns gewähren. Würde man Holz blos zur Feuerung bedürfen, und dieſes der einzige Nutzen ſeyn, den uns die Wälder leiſten, ſo würde man die Holzpreiſe nach dem Maaße, als die verſchiedene Holzarten dazu dienen, beſtimmen müßen. Z. B. einige halten dafür, daß man mit $14\frac{1}{2}$ Klafter Buchen- oder Eichenholz eben ſo viel Wärme in den Zimmern zuwege bringen könne, als mit 17 Klafter Feichtenholz. Dieſem zufolge müßte der Preis vom erſtern zum Preis vom letztern ſich wie 17 : $14\frac{1}{2}$ verhal-

halten, wenn man nur auf die Feuerung Rückſicht nehmen wollte. Allein wir brauchen auch Bauholz, Holz zu Geräthſchaften für Böttger, Wagner, Schreiner, Drechsler, Kohlholz für Feuerarbeiter, beym Hüttenweſen, Holz bey dem Bergbaue, Waſſerbaue, zu Maſchinen ꝛc. Es kann daher bey dem Preiſe verſchiedener Holzarten auf die Feuerung allein nicht geſehen werden. Aber wenn man die oberwähnten Verſuche als richtig annimt, ſo iſt eine Klafter Buchenholz als Brennholz in Rückſicht auf Feuerung betrachtet, $\frac{17}{14\frac{1}{2}}$ Gulden = 1 Guld. 10 Kr. ohngefähr werth, wenn die Klafter Feichtenholz 1 Gulden koſtet.

86. Satz. Aufgabe.

§. 379. Wenn der Werth einer Klafter Brennholz, und deſſen Größe in Kubikfuſſen gegeben ſind, Baumſtämme, die ſich nach §. 367 berechnen laſſen, zu taxiren oder zu Geld anzuſchlagen.

Auf-

Aufloſung. I. Man ſuche ihren Kubikinhalt nach §. 367.

II. Man ſchließe vermöge §. 361, 888 Kubikfuß Stammholz geben 1000 Kubikfuß Scheiter- oder Klafterholz, wie viel giebt die Nro. I. gefundene Anzahl der Kubikfuſſe Stammholz?

III. Die vierte Proportionalgröße die man Nro. II. findet, dividire man durch die Anzahl der Kubikfuſſe, welche auf eine Klafter gehen, ſo erhält man die Anzahl der Scheiterklafter, welche die Baumſtämme zuſammen geben können.

IV. Die Nro. III. gefundene Anzahl der Scheiterklafter multiplizire man mit dem Preiſe einer Scheiterklafter Brennholz, ſo hat man den Werth aller Stämme als Brennholz betrachtet. Oder was einerley iſt:

I.

I. Man multiplizire den Kubikinhalt aller Stämme mit 1000, und mit dem Preiſe einer Klafter Brennholz.

I. Das Nro. I. erhaltene Produkt dividire man durch 888, und die Anzahl der Kubikfuſſe, welche auf eine Klafter gehen, was herauskömmt iſt der Werth der Stämme als Brennholz betrachtet.

Exempel. Etliche Stämme, die man nach §. 367 berechnet hat, geben zuſammen $661^{c'}, 820^{c''}$. Die Scheiterlänge der Klafter ſey $3\frac{1}{2}$ Fuß, alſo die Klafter von 126 Kubikfuſſen, und der Preis einer Klafter Brennholz von der Gattung der Stämme, 1 Gulden 30 Kreuzer. Nro. II. der erſten Auflöſung giebt $\frac{616,820 \times 1000}{888}$. Kubikfuſſe Scheiterholz. Nach Nro. III. kommen $\frac{616^{c'},820 \times 1000}{888 \times 126}$ Klafter, und nach Nro. IV.

616,

$$\frac{616^{c'},820 \times 1000 \times 90}{888 \times 126} \text{ Kr.} = 496{,}15 \text{ Kr.}$$ für den Preis aller Stämme, als Brennholz betrachtet, und wenn man die Körper auf Gulden bringt, ſo ſind 496,15 Kr. = 8 Guld. 16,15 Kr.

§. 380. Anmerkung. Das Exempel ſelbſt zeigt, daß die zwote Auflöſung mit der erſten völlig einerley geben muß.

§. 381. Anmerkung. Beym Bauholz multiplizire man den nach §. 379 gefundenen Preis mit 2, beym Nutzholz mit 3, und bey dem Blochholz mit 4: ſo ſind die Bäume gehörig taxirt, wenn man anders die oben angegebenen Verhältniſſe der Preiſe vom Brenn= Bau= Nutz- und Blochholz, wie 1 : 2 : 3 : 4 annehmen darf. Wobey aber wegen der Erinnerung im Betreff des Transports, wenn das Holz weit herzuholen iſt, für jeden Kubikfuß 1 oder 2 Pf. nachgelaſſen werden ſollten, wovon die Rechnung keine Schwierigkeit hat,

weil man aus Nro. I. §. 379 die Anzahl der Kubikfuſſe kennt, alſo die Menge der Pfenninge leicht mit derſelben multipliziren, und ihren Betrag auf Gulden und Kreuzer reduziren kann.

§. 382. Wenn beym Bau- Nutz- und Blochholz für den Kubikfuß Stammholz ein gewiſſer Preis feſtgeſetzt wird, ſo hat die Berechnung und Taxation weniger Umſtände. Z. B. wenn eine Welle 100 Kubikfuß hält, und der Kubikfuß 4 Kreuzer gilt, ſo iſt ihr Preis $= \frac{100 \times 4}{60}$ Kr. = 6 Guld. 40 Kr.

87. Satz. Aufgabe.

§. 383. Der Umfang eines Kreiſes iſt gegeben, man ſoll die Seite des Quadrats finden, welches ſich in demſelben beſchreiben läßt.

Aufloſung. I. Man ſuche aus dem gegebenen Umfange den zugehörigen Diameter

ent-

entweder nach §. 255, oder aus der Tafel Nro. I.

II. So viel Zolle und Theile davon als der Diameter hält, nehme man nach einem verjüngten Maaßſtabe, und beſchreibe damit den Kreis acbd Fig. 200.

III. Endlich ſetze man zween Diameter ab, und cd ſenkrecht aufeinander, ſo wird acbd das verlangte Quadrat ſeyn, wovon man auf dem verjüngten Maaßſtabe die Seite meſſen kann.

Oder I. Man ſuche abermal aus dem Umfange den zugehörigen Diameter, und

II. Dividire denſelben durch $\sqrt{2} = 1,414$, ſo wird der Quotient die Seiten des verlangten Quadrats angeben. Oder

III. Man multiplizire den Nro. I. erhaltenen Diameter mit 0,7072.

Beweis für die zwote Auflöſung. Es ſey der Diameter d. So iſt $am = cm = \frac{d}{2}$. Und $acq = amq + cmq = \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} = \frac{2d^2}{4} = \frac{d^2}{2}$ §. 88, alſo $ac = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d}{1,414}$ $= 0,7072d$, weil $\sqrt{2} = 1,414$ iſt, wenn man die Wurzel gehörig nach §. 115 Rechenk. auszieht, und $\frac{1}{1,414} = 0,7072$ giebt.

Exempel. Der Umfang ſey 55″. So wird der Diameter nach der Tafel Nro. I. 17,5″, und $0,7072 \times 17,5 = 12,376''$. Folglich hält die Seite des Quadrats 12,4″ ohngefähr.

§. 384. Zuſatz. Heißt die Peripherie p, ſo iſt wegen $\pi : 1 = p : d$. Der Diameter $d = \frac{p}{\pi}$. Alſo $\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{p}{\pi\sqrt{2}} = \frac{p}{3,1415 \times 1,414} = 0,2251p$.

Exempel. Der Umfang ſey abermal 55″, ſo iſt die Seite des Quadrats $= 0{,}2251 \times 55 = 12{,}38''$, oder 12,4″ ohngefähr wie zuvor.

§. 385. Zuſatz. Heißt die Seite des Quadrats c, ſo iſt $c = 0{,}7072 d$, oder auch $= 0{,}2251 p$. Folglich $\frac{c}{0{,}7072} = d$, und $\frac{c}{0{,}2251} = p$. Oder $1{,}414 c = d$, und $4{,}442 c = p$, weil $\frac{1}{0{,}7072} = 1{,}414$, und $\frac{1}{0{,}2251} = 4{,}442$ iſt. Dieſes kann dienen, wenn die Seite eines Balkenſtücks gegeben iſt, und daraus der Diameter, oder Umfang eines Stammholzes geſucht wird, welcher einen Balken von der verlangten Stärke geben kann.

§. 386. Anmerkung. Wenn man das Balkenſtück abcd Fig. 201 durch einen Kreuzſchnitt theilen läßt, ſo erhält man vier Riegel; durch einen doppelten Kreuzſchnitt aber Fig. 203 neun kleine vierkantige Balken. Läßt man auf einer Seite Fig. 202 zween, auf der andern nur einen Sägeſchnitt machen,

ſo

ſo erhält man ſechs Riegel deren Grundflächen Rechtecke ſind. Will man Latten aus einem Bloch ſchneiden laſſen, ſo thut man am beßten, wenn man die vier Segmente apb, bnc, cmd, dqa Fig 204 um ſie zu Schwarten und Vorſchlagbrettern zu benutzen, vorläufig abnehmen, und das vierkantige Stück abcd allein zu Latten ſchneiden läßt.

§. 387. Anmerkung. Wie viel man ſowohl Riegel als auch Latten aus einem vierkantigen Balken erhalten könne, läßt ſich ganz leicht überſchlagen, wenn man nach einem verjüngten Maaßſtabe mit dem halben Durchmeſſer des Bloches einen Kreis, und darein ein Quadrat nach §. 383 zeichnet. Trägt man in zwo gegenüberſtehenden Seiten dieſes Quadrats die Breite, in den andern zwo Seiten aber die Stärke der Riegel, oder Latten ſo vielmal auf, als es angeht, und zieht die Theilungspunkte durch Linien gehörig zuſammen, ſo wird die Anzahl der Quadrate oder Rechtecke, welche dadurch in dem

Qua-

Quadrate des Kreiſes entſtehen, die Anzahl der Riegel oder Latten, die ſich aus dem gegebenen Bloch ſchneiden laſſen, angeben, wie die Figuren 201, 202, 203, 204 von ſelbſt zeigen.

88. Satz. Aufgabe.

§ 388. Man ſoll durch Rechnung die Anzahl von Riegeln oder Latten finden, welche ein vierkantiger Balken geben kann.

Auflöſung und Beweis. Wenn Fig. 204 über der Seite dc eine Anzahl von Riegeln = m, an der Seite da aber eine Anzahl = n von Riegeln oder Latten übereinander liegen, ſo hat man die Reihe von m Riegeln oder Latten nmal, und daher iſt die Anzahl aller Riegel oder Latten = mn. Allein aus dre bloßen Anſicht der Figur wird man leicht gewahr, daß zu den m und n Riegeln oder Latten, welche über dc und ad liegen, m—1 und n—1 Sägeſchnitte gehören. Folglich

lich enthält die Seite des Quadrats dc, wenn es z. B Latten ſind, die Breite der Latten mmal, den Sägeſchnitt aber nur m—1mal, und die Seite da die Stärke der Latten nmal aber den Sägeſchnitt ebenfalls nur n—1mal. Es ſey alſo die Seite des Quadrats = a. Die Breite der Riegel = b. Ihre Stärke = c. Der Sägeſchnitt = d. So iſt

$$dc = a = bm + d\,(m-1) = bm + dm - d.$$
$$da = a = cn + d\,(n-1) = cn + dn - d.$$

Addirt man in den Gleichungen beyderſeits d, ſo iſt

$$a + d = bm + dm = m\,(b + d).$$

Und $a + d = cn + dn = n\,(c+d)$, daher $m = \frac{a+d}{b+d}$ und $n = \frac{a+d}{c+d}$. Folglich $mn = \frac{(a+d) \times (a+d)}{(b+d)\ \ (c+d)}$ oder $= \frac{(a+d)^2}{(b+d)(c+d)}$.

Exem-

Exempel. Es ſey $a = 22\frac{1}{4}''$. $d = \frac{1}{4}''$. $b = 3\frac{1}{2}''$. $c = 2''$. So iſt $m = \frac{a+d}{b+d} = 22\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = \frac{45}{2} : \frac{15}{4} = 6$. $n = \frac{a+d}{c+d} = 22\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4} = \frac{45}{2} : \frac{9}{4} = 10$. Folglich $mn = 60$, oder auch $(22\frac{1}{2})^2 : 3\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{4} = (\frac{45}{2})^2 : \frac{15}{4} \times \frac{9}{4} = \frac{45 \times 45 \times 4 \times 4}{4 \times 15 \times 9} = 60$.

§. 389. Zuſatz. Weil $a+d = bm+dm$ iſt, ſo erhält man, wenn man beyderſeits dm abzieht, $a+d-dm = bm$, alſo $\frac{a+d-dm}{m} = \frac{bm}{m} = b$. Auf eine ähnliche Art findet man $c = \frac{a+d-dn}{n}$. Dieſes kann dienen, wenn die Seite des vierkantigen Balkenſtücks gegeben iſt, die Stärke und Breite der Riegel und Latten zu finden, je nachdem man m oder n verſchieden annimmt.

Exem-

Exempel. Man ſetze $a = 25''$. $d = \frac{1}{4}$. $m = 6$. So iſt $b = \frac{25 + \frac{1}{4} - \frac{6}{4}}{6} = \frac{23\frac{3}{4}}{6} = \frac{95}{24} = 3\frac{23}{24}$. Von Werkleuten aber wird man weitere Eintheilungen als bis auf 4tel Zoll nicht wohl fodern können. Man ſetze daher $b = 3\frac{3}{4}''$. So wird $m = \frac{a+d}{b+d} = 25\frac{1}{4} : 4 = \frac{101}{16} = 6\frac{5}{16}$. Nun ſollte aber m ein ganze Zahl ſeyn, und weil $4 \times 6 = 24''$ iſt, ſo bleibt $25'' - 24'' = 1''$ übrig, welches noch ein Vorſchlagbrett von $1''$ Stärke geben, und vorläufig abgenommen werden könnte.

§. 390. Zuſatz. Sollen aus einem gegebenen Bloche Bretter geſchnitten werden, ſo nimt man Fig. 205 zuerſt in a und b zwo Schwarten weg, und giebt jeder mit Einſchluß des Sägeſchnitts $2''$ Stärke. Daher ziehe man $4''$ von dem Diameter des Bloches vorläufig für die Schwarten ab. Zu dem, was übrig bleibt, addire man den Sägeſchnitt, und was herauskömmt, dividire man durch die Sum-

me

me aus der Stärke der Bretter und dem Sägeſchnitt, ſo wird der Quotient die Anzahl der Bretter geben, welche ſich aus dem gegebenen Bloche ſchneiden laſſen.

Exempel. Der Diameter des Blochs ſey $= 26\frac{1}{2}''$. Die verlangte Stärke der Bretter $1\frac{1}{2}''$. Der Sägeſchnitt $\frac{1}{4}''$. So iſt $26\frac{1}{2}'' - 4 = 22\frac{1}{2}''$ und $22\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = \frac{91}{7} = 13$ Bretter.

Wäre der Diameter $31''$. So iſt $31 - 4 = 27$. Und $27\frac{1}{4} : 1\frac{3}{4} = \frac{109}{7} = 15\frac{4}{7}$. Aber $15 \times 1\frac{3}{4} = 26\frac{1}{4}''$. Alſo $27 - 26\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Folglich würde man nach abgenommenen Schwarten noch 15 Bretter von $1\frac{1}{2}$ Zoll Stärke, und eines von $\frac{3}{4}''$ Dicke erhalten.

§. 391. Zuſatz. Sollen die Bretter geſaumt werden, ſo nimt man zuerſt die vier Segmente, welche um das Viereck abcd Fig. 206 herum liegen, hinweg, und benützt ſie

zu

zu Schwarten und Vorſchlagebrettern. Addirt man ſodann zur Seite des Vierecks abcd die man nach §. 383 finden kann, den Sägeſchnitt, und dividirt dieſe Summe durch die Summe aus der Stärke der Bretter und dem Sägeſchnitt, ſo giebt der Quotient die Anzahl der geſaumten Bretter, welche ſich aus dem vierkantigen Balken abcd ſchneiden laſſen.

Exempel. Der Diameter ſey 31″. So iſt die Seite des Quadrats $= 0{,}7072 \times 31 = 21{,}92$ wofür ich 22″ annehmen will. Iſt die Stärke der Bretter $1\frac{1}{2}''$, ſo giebt $22\frac{1}{4} : 1\frac{3}{4} = \frac{89}{7} = 12\frac{5}{7}$ zur Anzahl der Bretter. Weil aber $12 \times 1\frac{3}{4} = 12 + \frac{12 \times 3}{4} = 12 + 9 = 21$, und $22 - 21 = 1''$ iſt, ſo erhält man aus dem vierkantigen Stücke abcd des Bloches zwölf Bretter von $1\frac{1}{2}''$, und eins von 1″ Stärke. Zieht man die Seite des Vierecks 22″ von dem Diameter 31″ ab, ſo bleiben 9″, wovon die Hälfte $4\frac{1}{2}''$ die Höhe eines Seg-

Segments iſt. Rechnet man für die Schwarte mit Einſchluß des Sägeſchnitts 2″, ſo bleiben noch $2\frac{1}{2}''$, die alſo noch 2 Vorſchlagebretter von 1″ Stärke geben. Mithin erhält man bey allen vier Segmenten, und aus dem Balken ſelbſt

4 Schwarten von . .	2″	Stärke.
8 Vorſchlagebretter von .	1″	
12 Tiſchlerbretter von .	$1\frac{1}{2}''$	
Noch ein Vorſchlagebrett von	1″	

§. 392. Wenn bey dem Verkaufe von Landgütern Ueberſchläge gemacht werden, ſo kommen ganz natürlich hiebey vorzüglich auch die Waldungen mit in Anſchlage, wenn deren einige vorhanden ſind. Selbſt den Eigenthümern der Wälder iſt daran gelegen, den geſammten Holzbeſtand ihrer Wälder ſo viel möglich zu kennen. Dieſes führt auf die Frage wie Wälder taxirt oder in Anſchlag ge-

gebracht werden ſollen, und wie man den geſammten Holzbeſtand der ſchlagbaren Hölzer ohngefähr erfahren könne. Sind die Wälder ſchon in ordentliche Gehaue gelegt, und forſtmäßig bewirthſchaftet, und man kennt den mittleren Ertrag der Gehaue von mehreren Jahren, ſo thut man am beſten, wenn man dieſen mittlern Ertrag als ein Intereſſe anſieht, und das dieſem Intereſſe zugehörige Kapital ſucht, und es für den Werth der Waldung annimt. Das Verhältniß des Intereſſe zum Kapital müßen die Umſtände des Orts, der Zeit, oder die wechſelſeitige Uebereinkunft der Käufer oder Verkäufer beſtimmen. Um den ganzen Holzbeſtand eines Waldes zu erkennen, verlangen einig' eine Durchzählung aller ſchlagbaren Holzſtämme. Eine Art und Weiſe, wie dieſes zu bewerkſtelligen wäre, beruht ohngefähr auf Folgendem. Man theilt die Stämme z. B. ihrer Größe nach in Rüſtſtangen, Rohr- Schindel- Sparrenhölzer ꝛc. oder deutlicher zu reden in 6 bis 9zollige, 9 bis 12zollige, 12

bis

bis 15zollige, und ſo weiter ein. Man vergißt aber dabey nicht die verſchiedenen Holzſorten zumal des Nutzholzes beſonders aufzuzeichnen. Zu dieſem Ende läßt man ſich 4 Zoll lange und eines kleinen Fingers dicke hölzerne Nägel verfertigen, ſelbige verſchiedentlich färben, und braucht zur Bezeichnung der Rüſtſtange z. B. die weißen, der Rohrhölzer die ſchwarzen Nägel ꝛc. Wenn man Hand an das Werk ſelbſt legt, ſo wird das abzuzählende Revier mit einem Bindfaden umfangen, die mit den Nägeln verſehenen Förſter aber, welche ſich in das eingeſchloſſene Revier begeben, ſtecken z. B. in die Rüſtſtangen weiße, in die Röhrhölzer ſchwarze ꝛc. Nägel. Iſt man mit einem Revier fertig, und weis man ſeinen Vorrath von Nägeln, ſo darf man nur den übriggebliebenen Theil jeder Abtheilung zählen, um die Anzahl der eingeſteckten zu erfahren. Andere, welche zu dieſem Geſchäfte gebraucht werden, und jenen nachgehen, ſehen, theils ob keine Stämme überſehen worden ſind, theils ſammeln ſie die einge-

ſteck-

ſteckten Någel wieder ein, wo es gut iſt, wenn alle Någel auf die Seite geſteckt werden, wo die Einſammler derſelben herkommen. Auf der Seite, an welcher die noch nicht taxirten Reviere ſtoſſen, wird der Faden gelaſſen, auf den andern Seiten aber loßgemacht, um neue Reviere damit einzuſchließen. Auch kônnen andere Merkmaale als z. B. Anpletzen der Båume hier mit zu Hůlfe genommen werden. Auf dieſe Art verfåhrt man den ganzen Wald durch, bis man zu Ende iſt. Die Fôrſter aber, welche taxiren, ſollen zugleich mit auf die verſchiedene Hôhe der in den Revieren befindlichen Ståmme ſehen, und nach Beſchaffenheit derſelben mit anmerken, wie viel von jeder Sorte zu einer gewiſſen Anzahl von Klaſtern erfordert werden môchten, damit man ſich in der ſogenannten taxmåßigen Berechnung des Forſtes darnach richten kônne. Man ſehe hierůber beſonders Vierenklee Seite 479. Wenn man endlich fůr jede Abtheilung der Ståmme eine gewiſſe mittlere Dicke und Hôhe annimt, ſo

laſſen

laſſen ſie ſich wie Zylinder berechnen, und weil man die Anzahl aller Stämme von jeder angenommenen mittlern Dicke und Höhe kennt, auch die Summe ihrer körperlichen Inhalte leicht finden. Nimt man die Summe der Kubikinhalte aller Abtheilungen zuſammen, ſo ſoll dieſes den geſammten Holzbeſtand ſo ziemlich hinlänglich in Kubikfuſſen geben, die man ſodann ganz leicht auf Klafter reduziren kann. Daraus erkennt man nach der Meinung einiger Forſtverſtändigen nicht allein den geſammten Holzbeſtand wie er zur Zeit der Durchzählung iſt, ſondern man kann auch vermittelſt eines angenommenen jährlichen mittleren Zuwachſes denſelben für künftige Jahre beſtimmen, und angeben, wie viel jährlich forſtmäßig geſchlagen werden könne. Man ſehe hierüber die §§. 268, 269 ꝛc.

§. 293. Wenn man die Eichen, die Bauſtämme, das Well- und Blochholz, die vorzüglichere Nutzholzſtämme in einem Walde abzählt, um hievon ſeinen Vorrath ohne

gefähr zu kennen, ſo kann es nicht übel ge-
than ſeyn. Allein um zu wiſſen, wie viel
Klafter der geſammte ſtehende Holzbeſtand
betrage, ſcheint dieſes Verfahren wenigſtens
nicht mehr zu leiſten als andere, die ich ſo-
gleich anführen werde. Ich will hier nichts
von den Koſten bey ſehr groſſen Waldungen
reden, welche eine ſolche Durchzählung erfo-
dern würde, auch kein Mißtrauen in die
Aufmerkſamkeit der Förſter ſetzen, welche auf
dieſe Art taxiren. Allein es muß zu vieles
dem Gutdünken und bloßen Augenmaaße
mehrerer Taxatorn überlaſſen werden, wenn
man anders nicht Stamm für Stamm die
Umfänge, und Höhen meſſen will. Giebt
man auch zu, daß die Schätzung der Stäm-
me aus ihrem Umfange und Höhe bey Na-
delhölzern ſo ziemlich leidentlich ausfallen
dürfte, ſo ſcheint dieſes doch bey den Laub-
holzarten mehr Schwierigkeit zu haben. Ge-
ſetzt aber, daß man auch auf dieſe Art den ge-
ſammten Holzbeſtand in Klaftern genau ken-
nen ſollte, ſo beſtimmt ja dieſes bey dem Kauf

und Verkauf den Werth der Wälder nicht allein; es fragt ſich dabey noch, z. B. ob die Grenzen ſtrittig oder nicht, ob und welches Jagdrecht der Beſitzer genießet, welche Gerechtſame die Unterthanen, die Eingeförſteten haben, ob der Boden gut oder ſchlecht, ob eine beſſere Kultur möglich, und welche Schwierigkeiten dabey obwalten, wie der Wald in Ruckſicht des Transports, des Abſatzes gelegen ꝛc.

§. 394. Nach Herrn Oettelt verfährt man bey der Taxation auf folgende Art. §. 96, Seite 80, dritte Auflage. „Man meſſe den „Forſt aus. Bey der Ausmeſſung e. g. ei„nes Nadelforſtes meſſe man jeden Theil deſ„ſelben beſonders. Man meſſe nämlich 1. „die ſchlagbaren Hölzer, 2. die Mittelhöl„zer, 3. die gereinigten Hölzer, 4. die Stan„genhölzer, 5. die jungen Dickigten, 6. den „jungen Wuchs, 7. Schläge ſo zum Wie„deranflug Hofnung geben, 8. die leeren „Schläge aus. Bey jeden merke man an,

 „wie

„ wie er beſtanden, ob e. g. die ſchlagbaren
„ Hölzer wohl beſtanden, geſund, und wohl
„ geſchloſſen ſind, oder ob ſie anbrüchig,
„ ſchlecht geſchloſſen, dünne ꝛc. ſtehen, ob
„ ſie ſchlank, ſchäftig und hoch, oder ob ſie
„ kürzer ſind, und einen ſchlechten Wuchs
„ haben. Bey jedem Stück nehme ich Er-
„ fahrung und Ueberzeugung zu Hülfe, und
„ bringe es in Anſchlag. Finde ich e. g.
„ eine Gegend ſolcher ſchlagbaren Hölzer, die
„ wohl gebaut, und geſchloſſen ſind, fin-
„ de ich, daß von dergleichen Hölzern 80
„ Acker da ſind, weis ich aus der Erfah-
„ rung, daß auf einem Acker von dergleichen
„ Hölzern 80 Klafter geſchlagen werden
„ können, ſo mache ich den Ueberſchlag, und
„ rechne 80mal 80 machen 6400 Klafter.
„ So viel ſtehen alſo auf dieſen 80 Ackern
„ wohlbeſtandene geſchloſſene Hölzer. — Und
„ auf dieſe Weiſe verfahre ich bey jeder Sor-
„ te von Hölzern, und bey jeder Gegend, die
„ ich antreffe, und bringe alles, was ich ge-
„ funden, in eine ordentliche Tabelle. Hie-

„ bey iſt aber auch zu beobachten, ob ich „ bey den Hölzern, die ich ausgemeſſen, vie„ les Werkholz habe, e. g. Blochbäume, „ die höher ins Geld getrieben werden kön„ nen. — Noch ferner ziehe ich in Betrach„ tung, zu was einem Gebrauch ich nach der „ Beſchaffenheit der Lage dieſer oder jener „ Hölzer ſolche verſilbern kann. E. g. auf „ den Hinterbergen des Thüringer-Waldes „ könnte ich öfters die ſchönſten Bauhölzer „ fällen. Aber wer kauft ſie ab? Die ſchön„ ſten Bauhölzer müßen öfters verkohlt wer„ den. Auch dieſes muß ich in Betrachtung „ ziehen. Die Lage einer Waldung hat da„ her einen ungemeinen Einfluß in den Werth „ derſelben — laßt uns ſetzen: wir haben „ einen Acker Holz, ſo ſchlagbar zu nennen, „ und auf welchem man nach Beſchaffenheit „ des darauf beſtandenen Holzes 60 Klafter „ Scheiter, 30 Schocke Reiſig, und 20 Klaf„ ter Stöcke ſchlagen kann. Laßt uns ferner „ ſetzen, die Klafter Holz in ſolcher Gegend „ wird nach Abzug des Holzmacherslohns vor

„ 1

„ 1 Reichsthaler 9 gute Groſchen, das Schock
„ Reiſig vor 6 Groſchen, und die Klafter
„ Stöcke vor 12 Groſchen verkauft, ſo wird
„ folgen, daß der gedachte Acker Holz 100
„ Reichsthaler werth ſey. Habe ich nun 20
„ Acker von dergleichen Hölzern, ſo kann ich
„ ſie auf 2000 Thaler taxiren. Den Werth
„ der ſchlagbaren Hölzer lege ich bey der
„ Taxation der übrigen Sorten von Hölzern
„ zum Grunde. Denn die verſchiedenen Sor-
„ ten von Hölzern ſtehen nach dem verſchie-
„ denen Alter miteinander in einem Verhält-
„ niſſe, ſie müßen alſo auch nach ſolchem
„ Verhältniß in Anſchlag gebracht werden.
„ Laßt uns ſetzen, ein Acker Holz ſo 100 Jahr
„ alt iſt, giebt 100 Reichsthaler Ausbeute,
„ und iſt alſo auf 100 Reichsthaler zu taxi-
„ ren. Will ich nun wiſſen, wie viel ein
„ Acker Mittelholz ſo 55 Jahre alt iſt, werth
„ iſt, ſo ſuche ich das Verhältniß, und rech-
„ ne alſo: wie ſich 100 Jahre zu 55 Jah-
„ ren verhalten, ſo verhält ſich ein Acker
„ ſchlagbares Holz von 100 Jahren zu einem

„ Acker

„Acker Mittelholz von 55 Jahren. Auf „dieſe Weiſe wird man finden, daß ein Acker „Mittelholz hier auf 55 Reichsthaler zu taxi„ren ſey. — Auf dieſe Weiſe taxire ich nach „ſolchen Verhältniſſen jedes Stück eines Re„viers, ſo in Anſchlag gebracht werden ſoll, „und thue ich dieſes, ſo werde ich den „Werth des Ganzen finden. Hat man mich „in Anſehung deſſen verſtanden, was ich „bisher von der Taxation eines Nadelwal„des beygebracht habe, ſo wird man ſich „leicht vorſtellen können, wie ich mit der „Taxation der Laubhölzer zu verfahren habe. „Auch dieſe meſſe man aus, man meſſe je„den Theil des Ganzen, und bemerke deſſen „Beſchaffenheit, wie derſelbe beſchaffen, „was er für Oberwuchs, was er für Un„terwuchs habe? ꝛc. Habe ich einen Acker „ſolcher Laubhölzer, die hiebig und 36 bis „40 Jahre alt ſind, weis ich aus der Erfah„rung, daß ein ſolcher Acker 40 Reichs„thaler Ausbeute gebe, ſo taxire ich denſel„ben auch auf 40 Reichsthaler, habe ich 50

„Acker

„Acker dergleichen haubare Laubhölzer, ſo „kann ich ſolche auf 2000 Reichsthaler an„ſchlagen. Diejenigen Hölzer aber, die noch „nicht hiebig ſind, werden nach dem Ver„hältniſſe ihres Alters taxirt.“ — So weit Herr Oettelt.

§. 395. Wollte man den Werth eines Ackers Mittelholzes von 55 Jahren, wovon Herr Oettelt ſpricht, in Rückſicht der ſchlagbaren Hölzer, welche 100 Jahre alt ſind, mit einem Kapital vergleichen, daß innerhalb 45 Jahren, welche ſie nöthig haben, haubar zu werden, durch Zinſen, und Zinſen von Zinſen zu 100 Reichsthalern erwächſt, ſo würde derſelbe ſich auf folgende Art berechnen laſſen. Man nenne dieſen Werth x, das Kapital welches nach n Jahren daraus mit Zinſen und Zinſen von Zinſen entſteht, ſey = a. Das Verhältniß des Kapitals zu den Zinſen ſey = 1 : m. So iſt $x = \left(\frac{a}{1+m}\right)^n$.

Denn weil 1 : m = x : mx iſt, ſo iſt das

Kapi-

Kapital zu Ende des erſten Jahrs ſammt dem Zinſe $= x + mx$. Dieſes als Kapital betrachtet, giebt zu Ende des zweyten Jahrs am Zins $mx + m^2x$, folglich ſammt dem Kapital $x + mx + mx + m^2x = x + 2mx + m^2x = x(1+2m + m^2) = x(1+m)^2$ ꝛc. Daraus ſieht man ganz leicht, daß das Kapital a, welches aus x nach n Jahren entſtanden iſt, $= x(1+m)^n$ ſeyn werde. Folglich, weil $a = x(1+m)^n$ iſt, $x = \frac{a}{(1+m)^n}$ ſeyn müße. Z. B. wäre $a = 100$. $n = 45$ $1 : m = 100 : 3$, alſo $m = \frac{3}{100}$. So iſt $x = \frac{100}{(\frac{103}{100})^{45}}$, und Log. x = Log. 100 — Log. $(\frac{103}{100})^{45}$ §. 194 Rechenk. = Log. 100 — 45 Log. $(\frac{103}{100})$ §. 192 Rechenk. = Log 26, 44. Nach Herrn Oettelt kommen 55 Reichsthaler für den Werth eines dergleichen Ackers heraus, wenn man nach ſeiner Vorſchrift rechnet. §. 394. Man ſieht, daß auf dieſe Art der Werth der Hölzer viel kleiner ausfällt, als wenn man ſelben in dem bloſſen

Ver-

Verhältniſſe der Jahren annimt, und daß um ſo mehr, je höhere Zinſen zum Grunde liegen.

§. 396. Weis man den Flächeninhalt des ganzen Waldbodens nach Abzug aller leeren verangerten Plätze ꝛc., ſo ſchlage man ein Jahr ſo viel als die jährliche Konſumtion erfodert, an Orten, wo das Holz am beſten, das andere Jahr, wo es am ſchlechteſten beſtanden iſt, und meſſe die Flächeninhalte der Schläge, ſo wird ſich der Quadratinhalt jedes dieſer Schläge zu 1 Tagwerk, wie die jährliche Konſumtion zu dem was ein gut und ein ſchlecht beſtandenes Tagwerk der Waldung abwirft, verhalten. Nimt man zwiſchen der Ausbeute eines ſchlecht und eines wohl beſtandenen Tagwerks das Mittel, und multiplizirt es mit der Anzahl aller Tagwerke der ganzen Waldung, ſo giebt das Produkt den wahrſcheinlichen Holzbeſtand wenigſtens eben ſo zuverläßig als die §. 392 gelehrte Abzählung der Stämme.

§. 397. Den eigentlichen wahren Werth eines Waldes beſtimmt meiner Meinung nach die jährliche forſtmäßige Nutzung, die er abwirſt, und immerwährend abwerfen kann, ohne das Holz auszureuten. Zieht man von dem Betrag der jährlichen forſtmäßigen Nutzung das, was an andere unentgeltlich abgelaſſen werden muß, hinweg, ſo kann der Reſt zu Geld angeſchlagen, und als das Intereſſe eines Kapitals angeſehen werden, das dem Werth der Waldung gleichkömmt. Einige ſuchen den geſammten Holzbeſtand §. 392 in Klaftern, und ſchlagen denſelben zu Gelde an, das was herauskömmt, iſt nach ihrer Meinung der Werth der Waldung. Allein wenn dieſes der Werth der Waldung wäre, ſo müßte immerwährend jährlich ſo viel Holz darinn geſchlagen werden können, als das Intereſſe beträgt, das dieſer Werth als Kapital betrachtet, nach einem landesüblichen Zinſenfuſſe abwerfen kann. Man ſetze die Anzahl der Klafter eines Waldes die auf den Stämmen ſtehen $= k$, der Werth einer Klafter

der ſey = p. Das Verhältniß des Kapitals zum Zins wie 1 : m. So würde auf dieſe Art pk der Werth der ganzen Waldung, und das jährliche Intereſſe von dieſem Werth, als ein Kapital betrachtet = pkm ſeyn. Müß-ten nun jährlich x Klafter geſchlagen wer-den, um dieſes Intereſſe herauszubringen; ſo iſt ihr Werth px = pkm. Alſo x = mk. Oder 1 : m = k : x. Wären z. B. die landes-üblichen Zinſen, oder die worüber man über-eingekommen, 5 vom Hundert, ſo müßten jährlich von jeden Hundert Klaftern, die auf den Stämmen ſtehen, 5 geſchlagen werden. Man ſieht aber leicht ein, daß ſich die forſt-mäßige Nutzung nach andern Grundſätzen als dem Zinſenfuſſe richten müße. Die ganze Schwierigkeit beruhre alſo darinn, wie man die jährliche forſtmäßige Nutzung eines Waldes beſtimmen ſolle. Will man ſie nicht nach §. 270 berechnen, ſo überlege man, in wie viel Gehaue der Wald gelegt, was eines derſelben abwerfen, auch was man ſonſt noch am Bau- Nutzholz ein Jahr

in

in das andere gerechnet, daraus beziehen könnte, und ſchlage alles zu Gelde an, nach Preiſen, die zu derſelben Zeit am Orte dafür erhalten werden können. Den Betrag davon ſehe man als das Intereſſe eines Kapitals an, und ſuche nach einem landesüblichen, oder demjenigen Zinſenfuſſe, über welchen man übereingekommen, das dieſem Intereſſe zugehörige Kapital. Im übrigen ſehe man aber auch vorzüglich auf die §. 393 angeführten Umſtände, ſo wird ſich ein Ueberſchlag der Waldung nach allen Umſtänden, die ihn beſtimmen, entwerfen laſſen.

§. 398. Folgende Tafel enthält vier Kolonen, die erſte unter dem Buchſtabe A, enthält die Umfänge zwiſchen $\frac{1}{2}''$ und $200''$ von halb zu halb Zoll. In der zwoten B ſind die den Umfängen in A entſprechenden Diameter. Die dritte C giebt die Hälften, und die vierte die Sechstheile der Zirkelsflächen an, welche zu A und B gehören. Den

Ge-

Gebrauch können folgende Aufgaben am beſten zeigen.

Aufgabe.

§. 399. Die Umfänge am Zopfe und Stammende nebſt der Länge eines Stammes ſind gegeben, man ſoll den körperlichen Inhalt finden, vorausgeſetzt, daß man das Produkt aus der Länge in das Mittel der beyden Zirkelsflächen am Zopfe und Stammende für den Inhalt annehme.

Auflöſung. I. Man ſuche die den gegebenen Umfängen entſprechende halbe Zirkelsfläche in der Kolone C, und addire ſie zuſammen. II. Die Summe davon multiplizire man mit der gegebenen Länge, die man in Zollen ausdrückt, was herauskömmt, iſt der körperliche Inhalt in Kubikzollen, die man leicht auf Fuſſe reduziren kann.

Exempel. Der Stamm ſey 40′ lang. Die Umfänge am Zopfe und Stammende 19″ und 55″. In der Tafel entſprechen in der Kolone C dieſen Umfängen die Zahlen 14,36 und 120,36, wovon die Summe 134,72 iſt, und $134{,}72 \times 400 = 53888^{c''} = 53^{c'}, 888^{c''}$ den Inhalt giebt. Berechnet man dieſes Beyſpiel nach §. 367 Nro. III. ſo kömmt $53^{c'}, 905^{c''}, 120^{c'''}$, folglich um 0,017, $12^{c''}$ mehr heraus.

Aufgabe.

§. 400. Man ſoll den Stamm als einen abgekürzten Kegel anſehen, und durch Hülfe der Tafeln berechnen, wenn, wie zuvor, nebſt der Länge, die Umfänge am Zopfe und Stammende gegeben ſind.

Auflöſung. I. Man addire die den gegebenen Umfängen in der Kolone C entſprechenden halben Zirkelsflächen. II. Und ſubtra-

hire

hire von der Summe die man Nro. I. erhält, die der Differenz der Umfänge entſprechende Zahl in der Kolone D. III. Den Nro. II. erhaltenen Unterſchied multiplizire man mit der gegebenen Länge in Zollen ausgedrückt, was herauskömmt, iſt der Inhalt des abgekürzten Kegels in Kubikzollen.

Exempel. Die Umfänge am Zopfe und Stammende ſeyen abermal 19'' und 55. Die Länge 40'. So iſt die Summe der halben Zirkelsflächen, welche in C beyden Umfängen zugehören 134,72. Der Unterſchied beyder Umfänge iſt 55 — 19 = 36. Dieſe Zahl als Umfang betrachtet, entſpricht in der Kolone D 17,186. Zieht man 17,186 von 134,72 ab, ſo bleiben 117,534, und wenn man die letztere Zahl mit der Länge in Zollen oder mit 400'' multiplizirt, ſo kommen $47^{c'}$, $013^{c''}$, $600^{c'''}$ heraus, welches von dem §. 367 Nro. II. gefundenen Inhalt nur um 0,009'',552''' verſchieden iſt.

Auf-

Aufgabe.

401. Wenn man den körperlichen Inhalt eines Stammes mit Vierenklee als ein Produkt aus der Länge in die Zirkelsfläche des mittleren Umfangs zwiſchen dem am Zopfe und Stammende betrachtet, denſelben durch Hülfe der Tafeln zu finden.

Aufloſung. I. Man addire die gegebenen Umfänge am Zopfe und Stammende zuſammen, und halbire ihre Summe. II. Die dieſer halben Summe in C entſprechende Zahl multiplizire man mit der gegebenen Länge des Stammes, und III. das in II. enthaltene Produkt noch mit 2, ſo iſt das, was herauskömmt, der verlangte Inhalt.

Exempel. Die Umfänge ſeyen wie zuvor 19″ und 55″, die Länge 40′. So iſt die halbe Summe der Umfänge $\frac{19+55}{2} = 37$.

Dem Umfange 37″ entſpricht in der Kolone C die Zahl 54,47. Das Produkt von 54, 47 in der Länge 400 giebt 217,8800, wo-

von das Doppelte 43576 $^{c''}$ = 43 $^{c'}$, 576 $^{c''}$ iſt. In §. 367 Nro. IV. findet man 43 $^{c'}$, 588 $^{c''}$, 960 $^{c'''}$, wo eben dieſes Beyſpiel berechnet iſt, alſo um 12,96 $^{c''}$ mehr als hier.

Aufgabe.

402. Einen kegelförmigen Stamm Holzes durch Hülfe der Tafeln zu berechnen, wenn der Umfang ſeiner Grundfläche, und deſſen Höhe gegeben ſind.

Aufloͤſung. I. Man ſuche die dem Umfange in der Kolone D entſprechende Zahl, und II. multiplizire ſie mit der gegebenen Höhe des Kegels. III. Das Nro. II. erhaltene Produkt nehme man doppelt, was herauskömmt, iſt der Inhalt des Kegels.

Exempel. Der Umfang der Grundfläche ſey 60″. Die Höhe 70′ oder 700″. So iſt die dem Umfange 60″ in D entſprechende Zahl 47,746, und 47,746×700=33422 $^{c''}$, 2, wo-

wovon das doppelte $66^{c'}, 844^{c''}, 400^{c'''}$ giebt.

§. 403. **Anmerkung.** Die Umfänge kann man mit einem in Zolle und ½ blae Zolle eingetheilten pergamentenen Streifen meſſen. Man mißt ſie leichter als die Diameter. Die Tafel enthält beyde. Was die Konſtruktion der Tafeln ſelbſt betrift, ſo beruhen ſie auf folgendem Ausdrucke des abgekürzten Kegels. Man ſetze den Umfang am Zopfende $= p$. Den am Stammende $= p + u$. Die Höhe des abgekürzten Kegels q, und das Verhältniß des Diameters zur Peripherie $1 : \pi$, ſo iſt der körperliche Inhalt des abgekürzten Kegels $= q \left(\frac{p^2 + pu}{4\pi} + \frac{u^2}{12\pi} \right) =$

$$q \left(\frac{p^2 + (p+u)^2}{2 \times 4\pi} - \frac{u^2}{6 \times 4\pi} \right).$$

Aber $\frac{p^2 + (p+u)^2}{2 \times 4\pi}$ iſt das arithmetiſche Mittel zwiſchen beyden Grundflächen, und $\frac{u^2}{4\pi}$

kann als eine Zirkelsfläche angeſehen werden, deren Umfang u iſt.

§. 404. Anmerkung. Vierenklee giebt in ſeiner dritten ſogenannten Ziffertafel für gegebene Höhen und Diameter die körperlichen Inhalte der §. 401 angeführten Vorausſetzung gemäß, ſelbſt an. Herr Prof. Däzl hat die Vierenkleeiſchen Tafeln ſeinem Handbuche beydrucken laſſen, und zeigt deren Gebrauch auch alsdann, wenn man die Stämme als abgekürzte Kegel betrachten ſollte. Herr Hofrath Käſtner erwähnt Seite 394 ſeiner Anfangsgründe der Arithmetik ꝛc. vierte vermehrte Auflage, einiger hieher gehörigen Tafeln, glaubt aber, daß man bey den Formeln, die er gelehrt hätte, die angeführten Tafeln ſowohl als mehrere Hülfsmittel dieſer Art leicht entbehren könnte. Da ſich der Gebrauch und die Einrichtung der verſchiedenen hieher gehörigen Tafeln ganz leicht aus dem jedesmal denſelben beygefügten Unterricht erlernen läßt, ſo würde es überflüßig ſeyn, hier etwas davon beyzubringen.

Umfang A	Diameter B	$\frac{1}{2}$ Zirkelsfläche C	$\frac{1}{6}$ Zirkelsfläche D
$\frac{1}{2}$	0,16	0,01	0,003
1	0,31	0,04	0,013
1,5	0,48	0,10	0,033
2	0,63	0,16	0,053
2,5	0,80	0,26	0,086
3	0,95	0,36	0,120
3,5	1,11	0,50	0,166
4	1,27	0,64	0,213
4,5	1,43	0,82	0,273
5	1,59	1,00	0,333
5,5	1,75	1,21	0,403
6	1,91	1,43	0,476
6,5	2,07	1,69	0,563
7	2,23	1,95	0,650
7,5	2,39	2,25	0,750
8	2,55	2,55	0,850
8,5	2,71	2,88	0,960
9	2,86	3,22	1,073
9,5	3,02	3,60	1,200
10	3,18	3,98	1,326

Umfang A	Diameter B	½ Zirkels-fläche C	⅙ Zirkels-fläche D
10,5	3,34	4,39	1,463
11	3,50	4,86	1,603
11,5	3,66	5,26	1,753
12	3,82	5,72	1,906
12,5	3,98	6,22	2,073
13	4,15	6,72	2,240
13,5	4,30	7,25	2,416
14	4,46	7,79	2,596
14,5	4,61	8,37	2,790
15	4,77	8,95	2,983
15,5	4,93	9,56	3,186
16	5,09	10,18	3,393
16,5	5,25	10,83	3,610
17	5,41	11,49	3,830
17,5	5,57	12,19	4,063
18	5,73	12,89	4,296
18,5	5,89	13,62	4,540
19	6,05	14,36	4,786
19,5	6,21	15,13	5,043
20	6,37	15,91	5,303

Umfang A	Diameter B	½ Zirkelsfläche C	⅙ Zirkelsfläche D
20,5	6,52	16,72	5,572
21	6,68	17,54	5,846
21,5	6,84	18,39	6,130
22	7,00	19,25	6,416
22,5	7,16	20,14	6,713
23	7,32	21,04	7,013
23,5	7,48	21,97	7,323
24	7,64	22,91	7,636
24,5	7,80	23,88	7,960
25	7,96	24,86	8,286
25,5	8,12	25,87	8,623
26	8,28	26,89	8,963
26,5	8,43	27,94	9,313
27	8,59	29,00	9,666
27,5	8,75	30,09	10,030
28	8,91	31,19	10,396
28,5	9,07	32,32	10,773
29	9,23	33,46	11,153
29,5	9,39	34,63	11,543
30	9,55	35,81	11,933

Umfang A	Diameter B	½ Zirkelsfläche C	⅙ Zirkelsfläche D
30,5	9,71	37,02	12,340
31	9,87	38,23	12,743
31,5	10,03	39,48	13,160
32	10,19	40,74	13,580
32,5	10,34	42,03	14,010
33	10,50	43,33	14,443
33,5	10,66	44,66	14,886
34	10,82	45,99	15,330
34,5	10,98	47,36	15,786
35	11,14	48,74	16,246
35,5	11,30	50,15	16,716
36	11,46	51,56	17,186
36,5	11,62	53,01	17,670
37	11,78	54,47	18,156
37,5	11,94	55,93	18,643
38	12,10	57,40	19,133
38,5	12,25	58,96	19,653
39	12,41	60,52	20,173
39,5	12,57	62,09	20,696
40	12,73	63,66	21,220

Umfang A	Diameter B	$\frac{1}{2}$ Zirkels= fläche C	$\frac{1}{6}$ Zirkels= fläche D
40,5	12,89	65,27	21,756
41	13,05	66,88	22,293
41,5	13,21	68,53	22,843
42	13,37	70,18	23,393
42,5	13,53	71,87	23,956
43	13,69	73,57	24,523
43,5	13,85	75,30	25,100
44	14,01	77,03	25,676
44,5	14,16	78,80	26,266
45	14,32	80,57	26,853
45,5	14,48	82,38	27,460
46	14,64	84,19	28,063
46,5	14,80	86,04	28,680
47	14,96	87,89	29,296
47,5	15,12	89,78	29,926
48	15,28	91,67	30,556
48,5	15,44	93,60	31,200
49	15,60	95,53	31,843
49,5	15,76	97,50	32,500
50	15,91	99,47	33,156

Umfang A	Diameter B	½ Zirkelsfläche C	⅙ Zirkelsfläche D
50,5	16,07	101,48	33,826
51	16,23	103,49	34,496
51,5	16,39	105,54	35,180
52	16,55	107,59	35,863
52,5	16,71	109,67	36,556
53	16,87	111,76	37,253
53,5	17,03	113,89	37,963
54	17,19	116,02	38,673
54,5	17,35	118,19	39,396
55	17,51	120,36	40,120
55,5	17,67	122,57	40,856
56	17,82	124,78	41,593
56,5	17,98	127,02	42,340
57	18,14	129,27	43,090
57,5	18,30	131,56	43,853
58	18,46	133,85	44,616
58,5	18,62	136,17	45,390
59	18,78	138,50	46,166
59,5	18,94	140,87	46,956
60	19,10	143,24	47,746

Umfang A	Diameter B	½ Zirkelsfläche C	⅙ Zirkelsfläche D
60,5	19,26	145,64	48,546
61	19,42	148,05	49,350
61,5	19,58	150,50	50,166
62	19,73	152,95	50,983
62,5	19,89	155,43	51,810
63	20,05	157,92	52,640
63,5	20,21	160,44	53,480
64	20,37	162,97	54,323
64,5	20,53	165,54	55,180
65	20,69	168,11	56,036
65,5	20,85	170,81	56,936
66	21,01	173,32	57,773
66,5	21,17	175,96	58,653
67	21,24	178,61	59,536
67,5	21,49	181,29	60,430
68	21,64	183,98	61,326
68,5	21,80	186,71	62,236
69	21,96	189,44	63,146
69,5	22,12	192,20	64,066
70	22,28	194,97	64,990

Umfang A	Diameter B	$\frac{1}{2}$ Zirkels-fläche C	$\frac{1}{6}$ Zirkels-fläche D
70,5	22,44	197,77	65,923
71	22,60	200,58	66,860
71,5	22,75	203,42	67,806
72	22,92	206,27	68,756
72,5	23,08	209,15	69,383
73	23,24	212,04	70,680
73,5	23,40	214,96	71,653
74	23,55	217,88	72,626
74,5	23,71	220,84	73,600
75	23,87	223,81	74,603
75,5	24,03	226,81	75,603
76	24,19	229,82	76,606
76,5	24,35	232,86	77,620
77	24,51	235,91	78,636
77,5	24,67	238,99	79,663
78	24,83	242,08	80,693
78,5	24,99	245,20	81,733
79	25,15	248,32	82,773
79,5	25,31	251,48	83,826
80	25,46	254,65	84,883

Umfang A	Diameter B	½ Zirkels-fläche C	⅙ Zirkels-fläche D
80,5	25,62	257,85	85,950
81	25,78	261,06	87,020
81,5	25,94	264,30	88,100
82	26,10	267,54	89,180
82,5	26,26	270,82	90,273
83	26,42	274,11	91,370
83,5	26,58	277,43	92,476
84	26,74	280,75	93,583
84,5	26,90	284,11	94,703
85	27,06	287,48	95,826
85,5	27,21	290,88	96,960
86	27,37	294,28	98,093
86,5	27,53	297,72	99,240
87	27,69	301,17	100,396
87,5	27,85	304,65	101,550
88	28,01	308,13	102,710
88,5	28,17	311,65	103,883
89	28,33	315,17	105,056
89,5	28,49	318,73	106,243
90	28,65	322,29	107,430

Umfang A	Diameter B	½ Zirkelsfläche C	⅙ Zirkelsfläche D
90,5	28,81	325,89	108,630
91	28,97	329,50	109,833
91,5	29,12	333,14	111,046
92	29,28	336,78	112,260
92,5	29,44	340,46	113,486
93	29,60	344,14	114,713
93,5	29,76	347,86	115,953
94	29,92	351,58	117,193
94,5	30,08	355,34	118,446
95	30,24	359,10	119,700
95,5	30,40	362,90	120,966
96	30,56	366,70	122,230
96,5	30,72	370,54	123,513
97	30,88	374,38	124,766
97,5	31,03	378,26	126,086
98	31,19	382,14	127,380
98,5	31,35	386,06	128,686
99	31,51	389,98	129,993
99,5	31,67	393,93	131,310
100	31,83	397,89	132,630

Umfang A	Diameter B	½ Zirkelsfläche C	⅙ Zirkelsfläche D
100,5	31,99	401,89	133,963
101	32,15	405,89	135,296
101,5	32,31	409,93	136,643
102	32,47	413,97	237,990
102,5	32,63	418,05	139,350
103	32,79	422,13	140,710
103,5	32,94	426,24	142,080
104	33,10	430,36	143,453
104,5	33,26	434,52	144,840
105	33,42	438,68	146,226
105,5	33,58	442,87	147,623
106	33,74	447,07	149,023
106,5	33,90	451,31	150,436
107	34,06	455,55	151,850
107,5	34,22	459,83	153,276
108	34,38	464,11	154,703
108,5	34,54	468,42	156,140
109	34,70	472,74	157,580
109,5	34,85	477,09	159,030
110	35,01	481,45	160,483

Umfang A	Diameter B	$\frac{1}{2}$ Zirkelsfläche C	$\frac{1}{6}$ Zirkelsfläche D
110,5	35,17	485,85	161,950
111	35,33	490,25	163,416
111,5	35,49	494,68	164,893
112	35,65	499,12	166,373
112,5	35,81	503,57	167,856
113	35,97	508,05	169,350
113,5	36,13	512,57	170,856
114	36,29	517,10	172,366
114,5	36,45	521,65	173,883
115	36,61	526,20	175,400
115,5	36,76	530,80	176,933
116	36,92	535,40	178,466
116,5	37,08	540,02	180,006
117	37,24	544,65	181,550
117,5	37,40	549,32	183,106
118	37,56	554,00	184,666
118,5	37,72	558,72	186,240
119	37,88	563,45	187,816
119,5	38,04	568,20	189,400
120	38,20	572,95	190,983

Umfang A	Diameter B	½ Zirkelsfläche C	⅙ Zirkelsfläche D
120,5	38,36	577,75	192,583
121	38,51	582,55	194,183
121,5	38,67	587,37	195,790
122	38,83	592,20	197,400
122,5	38,94	597,07	129,023
123	39,15	601,95	200,650
123,5	39,31	606,87	203,290
124	39 47	611,80	203,933
124,5	39,63	616,75	205,583
125	39,79	621,70	207,233
125,5	39,95	626,70	208,900
126	40,11	631,70	210,566
126,5	40,27	636,72	212,240
127	40,42	641,75	213,916
127,5	40,58	646,82	215,606
128	40,74	651,90	217,300
128,5	40,90	657,00	219,000
129	41,06	662,10	220,700
129,5	41,22	667,20	222,400
130	41,38	672,40	224,133

Umfang A	Diameter B	½ Zirkelsfläche C	⅙ Zirkelsfläche D
130,5	41,54	677,60	225,866
131	41,76	682,80	227,600
131,5	41,86	688,05	229,350
132	42,02	693,30	231,100
132,5	42,18	698,55	232,850
133	42,33	703,80	234,600
133,5	42,49	709,12	236,373
134	42,61	714,45	238,150
134,5	42,77	719,80	239,933
135	42,93	725,15	241,716
135,5	43,09	730,55	243,516
136	43,25	735,95	245,316
136,5	43,41	741,37	247,123
137	43,57	746,80	248,933
137,5	43,72	752,22	250,740
138	43,88	757,75	252,583
138,5	44,04	763,25	254,416
139	44,20	768,75	256,250
139,5	44,36	774,30	258,100
140	44,52	779,85	259,950

Umfang A	Diameter B	$\frac{1}{2}$ Zirkelsfläche C	$\frac{1}{6}$ Zirkelsfläche D
140,5	44,72	785,45	261,816
141	44,88	791,05	263,683
141,5	45,04	796,67	265,556
142	45,20	802,30	267,433
142,5	45,36	808,00	269,333
143	45,52	813,70	271,233
143,5	45,68	819,37	273,123
144	45,84	825,05	275,016
144,5	46,00	830,80	276,933
145	46,15	836,55	278,850
145,5	46,31	842,35	280,783
146	46,47	848,15	282,716
146,5	46,63	853,97	284,658
147	46,79	859,80	286,600
147,5	46 95	865,67	288,556
148	47,12	871,55	290 516
148,5	47,28	877,45	292,483
149	47,43	883,35	294,450
149,5	47,59	889,30	299,766
150	47,75	895,25	298,416

Umfang A	Diameter B	$\frac{1}{2}$ Zirkelsfläche C	$\frac{1}{6}$ Zirkelsfläche D
150,5	47,91	901,25	300,416
151	48,06	907,25	302,416
151,5	48,22	913,27	304,423
152	48,38	919,30	306,433
152,5	48,54	925,37	308,456
153	48,70	931,45	310,483
153,5	48,86	937,55	312,516
154	49,02	943,65	314,550
154,5	49,18	949,80	316,600
155	49,34	955,95	318,650
155,5	49,50	962,12	320,706
156	49,66	968,30	322,766
156,5	49,81	974,52	324,840
157	49,97	980,75	326,916
157,5	50,13	987,02	329,006
158	50,29	993,30	331,100
158,5	50,45	999,60	333,200
159	50,61	1005,90	335,300
159,5	50,77	1012,25	337,416
160	50,93	1018,60	339,533

Umfang A	Diameter B	$\frac{1}{2}$ Zirkelsfläche C	$\frac{1}{6}$ Zirkelsfläche D
160,5	51,09	1024,97	341,656
161	51,25	1031,35	343,783
161,5	51,41	1037,77	345,923
162	51,57	1044,20	348,066
162,5	51,72	1050,67	350,223
163	51,88	1057,15	352,383
163,5	52,04	1063,65	354,550
164	52,20	1070,15	356,716
164,5	52,36	1076,70	358,900
165	52,52	1083,25	361,083
165,5	52,68	1089,85	363,283
166	52,84	1096,45	365,483
166,5	53,00	1103,07	367,690
167	53,16	1109,70	369,900
167,5	53,32	1116,35	372,116
168	53,48	1123,00	374,330
168,5	53,63	1129,70	376,566
169	53,79	1136,40	378,800
169,5	53,95	1143,17	381,056
170	54,11	1149,95	363,316

Umfang A	Diameter B	$\frac{1}{2}$ Zirkelsfläche C	$\frac{1}{6}$ Zirkelsfläche D
170,5	54,27	1156,70	385,566
171	54,43	1163,45	387,816
171,5	54,59	1170,27	390,090
172	54,75	1177,10	392,366
172,5	54,91	1183,97	394,656
173	55,07	1190,85	396,950
173,5	55,23	1197,75	399,250
174	55,39	1204,65	401,550
174,5	55,54	1211,60	403,866
175	55,70	1218,55	406,189
175,5	55,86	1225,52	408,506
176	56,02	1232,50	410,833
176,5	56,18	1239,52	413,173
177	56,34	1246,55	415,516
177,5	56,50	1253,65	417,883
178	56,66	1260,75	420,250
178,5	56,82	1267,82	422,606
179	56,98	1274,90	424,966
179,5	57,14	1282,02	427,340
180	57,30	1289,15	429,716

Umfang A	Diameter B	$\frac{1}{2}$ Zirkelsfläche C	$\frac{1}{6}$ Zirkelsfläche D
180,5	57,54	1296,35	432,116
181	57,61	1303,55	434,516
181,5	57,77	1310,77	436,923
182	57,93	1318,00	439,330
182,5	58,09	1325,25	441,750
183	58,25	1332,50	444,166
183,5	58,41	1339,80	446,600
184	58,57	1347,11	449,036
184,5	58,73	1354,45	451,483
185	58,89	1361,80	453,933
185,5	59,05	1369,17	456,390
186	59,21	1376,55	458,850
186,5	59,36	1383,97	461,323
187	59,52	1391,40	463,800
187,5	59,68	1398,85	466,283
188	59,84	1406,30	468,766
188,5	60,00	1413,80	471,266
189	60,16	1421,30	473,766
189,5	60,32	1428,85	476,283
190	60,48	1436,40	478,800

Umfang A	Diameter B	$\frac{1}{2}$ Zirkelsfläche C	$\frac{1}{6}$ Zirkelsfläche D
190,5	60,64	1443,97	481,323
191	60,80	1451,55	483,850
191,5	60,96	1459,17	486,390
192	61,11	1466,80	488,933
192,5	61,27	1474,45	491,483
193	61,43	1482,10	494,033
193,5	61,59	1489,80	496,600
194	61,75	1497,50	499,166
194,5	61,91	1505,25	501,750
195	62,07	1513,00	504,330
195,5	62,23	1520,77	506,923
196	62,39	1528,55	509,516
196,5	62,55	1536,37	512,123
197	62,71	1544,20	514,730
197,5	62,87	1552,05	517,350
198	63,02	1559,90	519,966
198,5	63,18	1567,80	522,600
199	63,34	1575,70	525,233
199,5	63,50	1533,67	527,890
200	63,66	1591,65	530,550

Einige Verbeſſerungen

und

Druckfehler.

Seite 3	Zeile 10	ſtatt	Bemerkungen	lies: Anmerkungen.
— 16	— 16	—	oder zu ſich	l. und zu ſich.
— 17	— 19	—	das Produkut	l. die Produkte.
— 25	— 11	—	47	l. 48.
— 28	— 6	—	2729	l. 2726.
— 35	— 3	—	$\frac{4}{5} \times 4$	l. $\frac{4}{15} \times 3$.
— 41	— 16	—	$6+\frac{21}{35}$	l. $6+\frac{31}{35}$.

Seite

Seite 44 Zeile 16 ſtatt $\frac{14 \times 7}{5 \times 2} = \frac{49}{8}$ lies: $\frac{14 \times 7}{3 \times 2} = \frac{49}{3}$.

— 51 — 2 — $=x$ l. $=x1$.

— 52 — 2 — Rechnung iſt l. Rechnung nöthig iſt.

— 57 — 19 — 90 l. 98.

— 65 — 14 — $2a^8$ l. $2a^3$.

— 77 — 12 — $\frac{1b^3 3}{b^2 \times b^3}$ l. $\frac{1b^3}{b^2 \times b^3}$.

— 79 — 2 — Vorfälle l. Fälle.

— 88 — 14 — §. 107. l. §. 110.

— 97 — 10 — 8453 l. $\sqrt{8453}$.

— 99 — 10 — a^2 l. a^2b.

— 103 — 12 — die Wurzel l. die Einer der Wurzel.

— 129 — 2 — Glied mit der l. Glied der.

— 131 — 7 — $\frac{450 \times 65}{3}$ l. $\frac{450 \times 165}{3}$.

Seite

Seite 157 Zeile 14 ſtatt 0,8450080 lies: 0,8450980.

—— 173 —— 8 —— 1+2S—2Z+1 l. 1+2S—2Z+Z—1.

—— 194 —— 6 —— CF l. EF.

—— 206 —— 19 —— x=a l. x=q.

—— 220 —— 7 —— Fig. 64. l. Fig. 58.

—— 221 —— 16 —— Fig. 58 l. Fig. 58*.

—— 225 —— 13 —— AED l. AEB.

—— 230 —— 8 lies noch Fig. 65.

—— 233 —— 4 —— Vielecks l. Winkels.

—— 237 —— 2 —— EEA l. DEA.

—— 238 —— 5 —— DE l. BE.

—— 290 —— 2 —— AB l. AK.

—— 313 —— 22 —— §. 308. l. §. 313.

—— 323 —— 1 —— §. 304. l. §. 305.

—— 323 —— 2 —— §. 305. l. §. 306.

—— 324 —— 21 —— §. 305. l. §. 306.

—— 325 —— 8 —— §. 305. l. §. 306.

—— 325 —— 11 —— §. 295. l. §. 296.

Seite

Seite 330 Zeile 16 ſtatt die Achſe die lies: die Achſe der.

— — 338 — — 5 — — △CGE l. △cgd mit △CGD.

— — 348 — — 21 — — CN l. CU.

— — 347 — — 15 — — laſſe man FG : fg weg.

— — 355 — — 3 — — §. 101. l. §. 136.

— — 363 — — 14 — — f l. F.

— — 363 — — 15 — — f l. F.

— — 387 — — 17 — — in Klaſſen theilt l. in Klaſſen jede von zwoen Ziffern theilt.

— — 391 — — 1 — — Dreyeck ABC l. Dreyeck ABC Fig. 150.

— — 395 — — 12 — — acd l. acb.

— — 399 — — 4 — — EF l. Ff.

— — 403 — — 12 — — §. 129. l. §. 128.

— — 425 — — 8 — — kleiner l. kleiner we den.

— — 429 — — 9 — — $y\left(\frac{3c^2+3c+1}{c^2}\right)$ l. $y\left(\frac{3c^2+3c+1}{c^2}\right)=$

Seite

Seite 460 Zeile 8 ſtatt 673,25 lies: 673,35.

—— 461 —— 2 —— 278,1 l. 287,1.

—— 462 —— 2 —— 40° l. 20°.

—— 483 —— 11 —— abb l. abh.

—— 485 —— 5 —— ſelbſt iſt l. ſenkrecht iſt.

—— 491 —— 3 —— Linie l. Linie ab.

—— 510 —— 18 —— §. 127. l. §. 123.

—— 511 —— 20 —— GDG l. FDG.

—— 512 —— 15 —— §. 151. l. §. 251.

—— 521 —— 15 —— $\frac{Pp}{4\pi}$ l. $\frac{Pp}{4\pi^2}$.

—— 522 —— 18 —— Kegels bab l. Kegels b ab.

—— 535 —— 4 —— $\frac{kBHKF^3}{bhef^3}$ l. $\frac{kBHLF^3}{bhlf^3}$.

—— 563 —— 3 —— Körper l. Kreuzer.

—— 573 —— 7 —— $26\frac{1}{2}$ l. $26\frac{3}{4}$.

—— 573 —— 8 —— $22\frac{1}{2}$ l. $22\frac{3}{4}$.

Seite

Seite 573 Zeile 8 ſtatt $22\frac{1}{2} : 1\frac{3}{3}''$ l. $22\frac{3}{4} : 1\frac{3}{4}$.

— — 586 — — 20 — — $\left(\frac{a}{1+m}\right)^n$ l. $\frac{a}{(1+m)^n}$

— — 591 — — 9 — — $0,017,12^{c''}$ l. $0^{c'}, 017^{c''}, 120^{c'''}$.

— — 593 — — 20 — — 217,8800 l. 21788,00.

— — 595 — — 4 — — hblae l. halbe.

München,

gedruckt bey Anton Franz, churfürſtl. Hof-
Akademie- und Landſchaftsbuchdrucker.

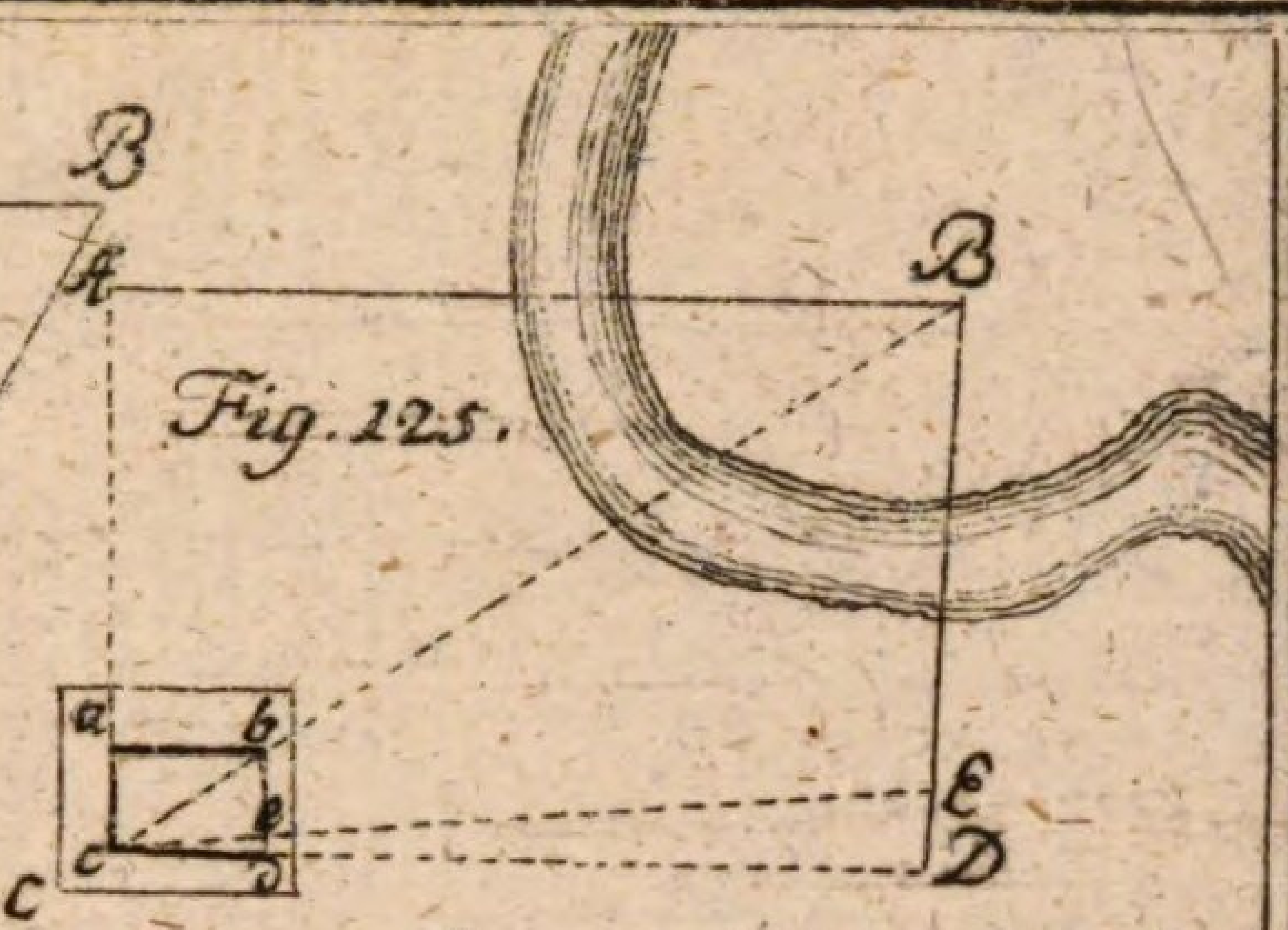


Fig. 125.

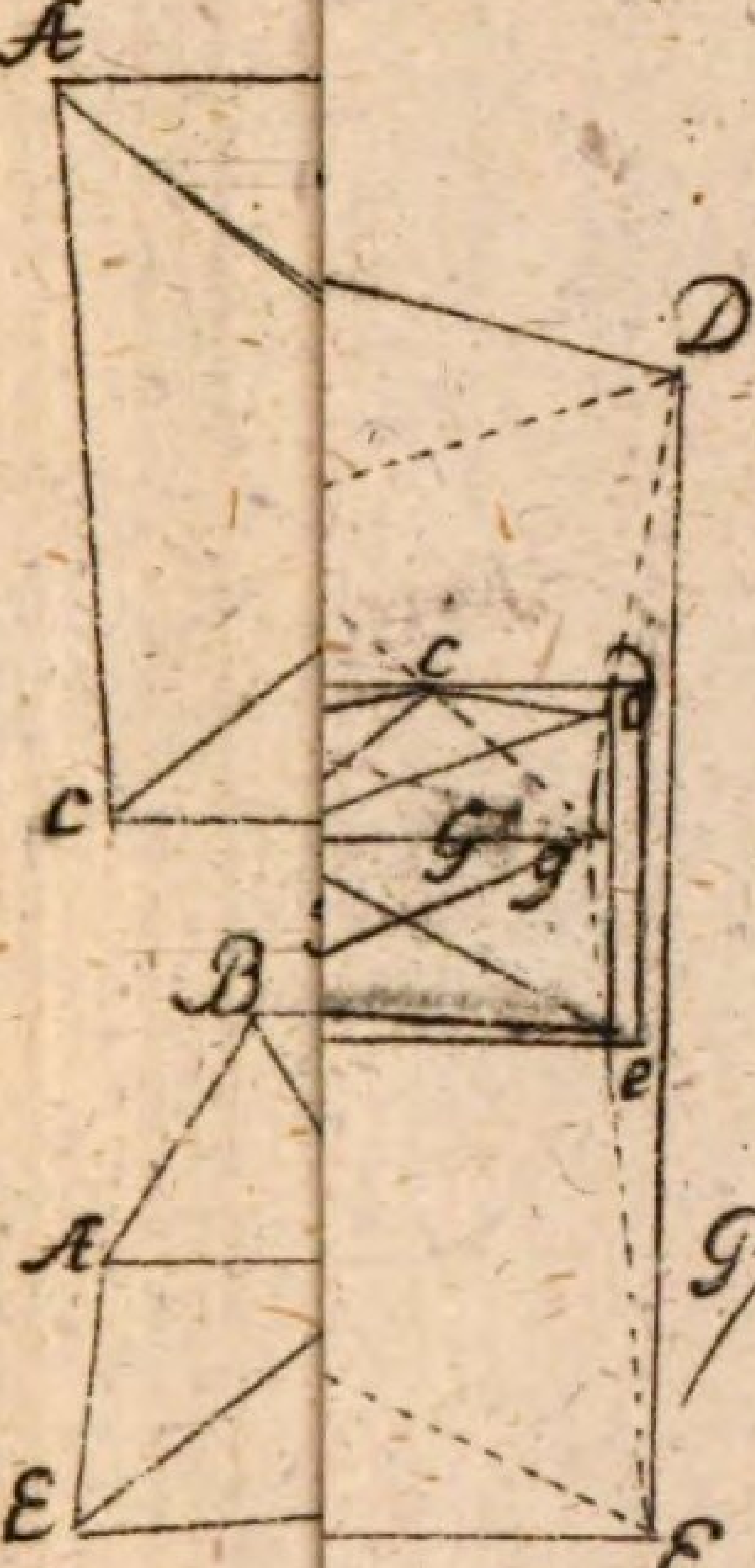


Fig. 130.

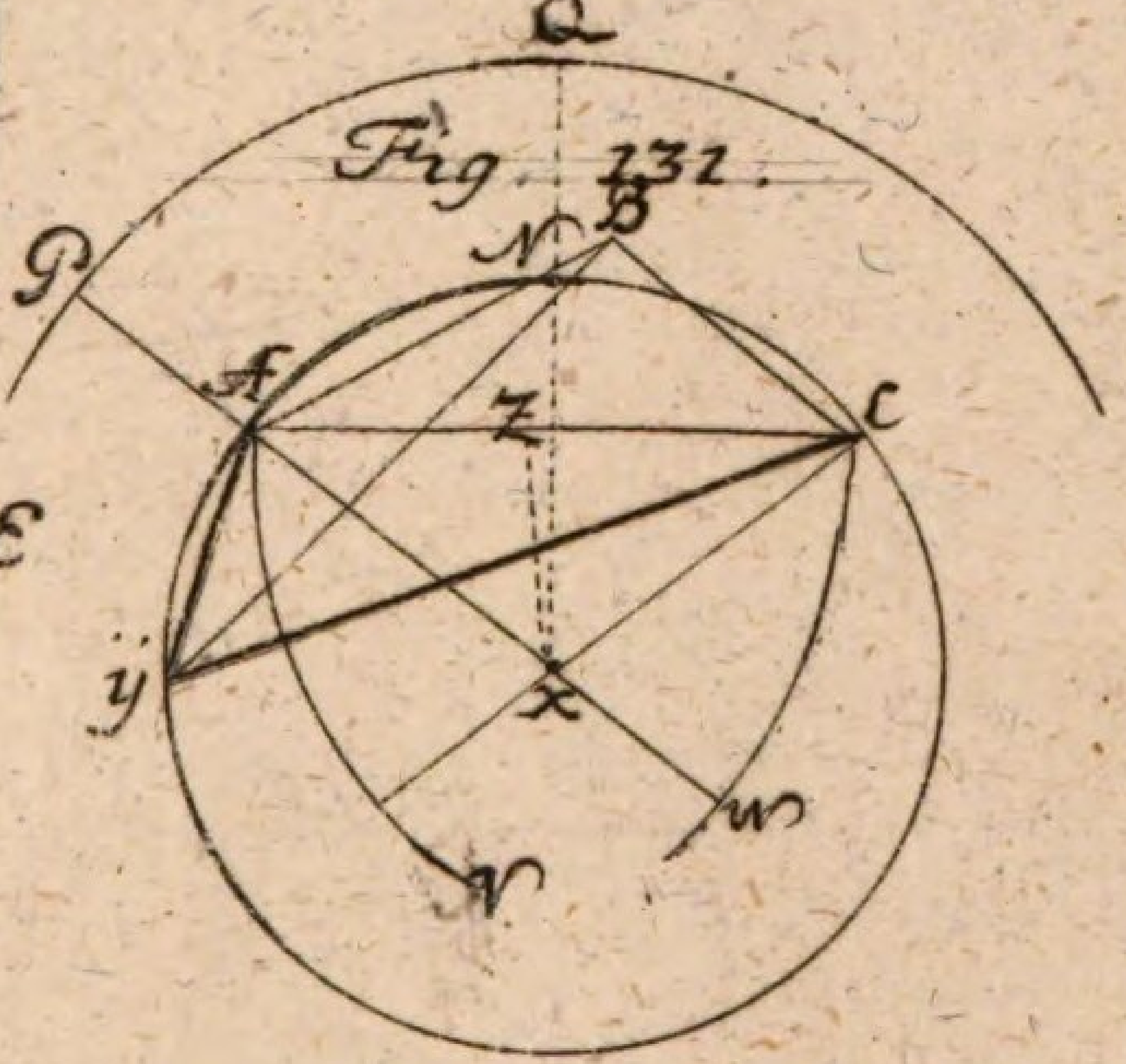
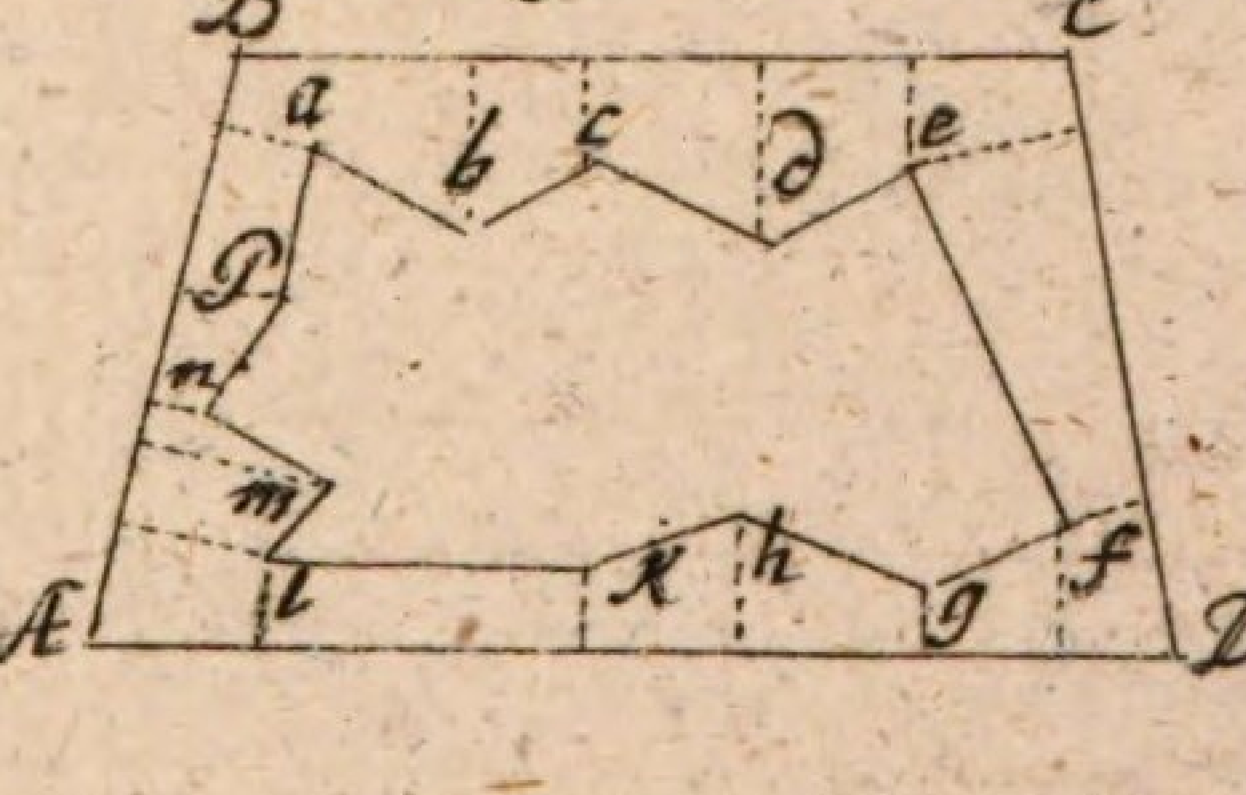


Fig. 131.

Fig. 134.



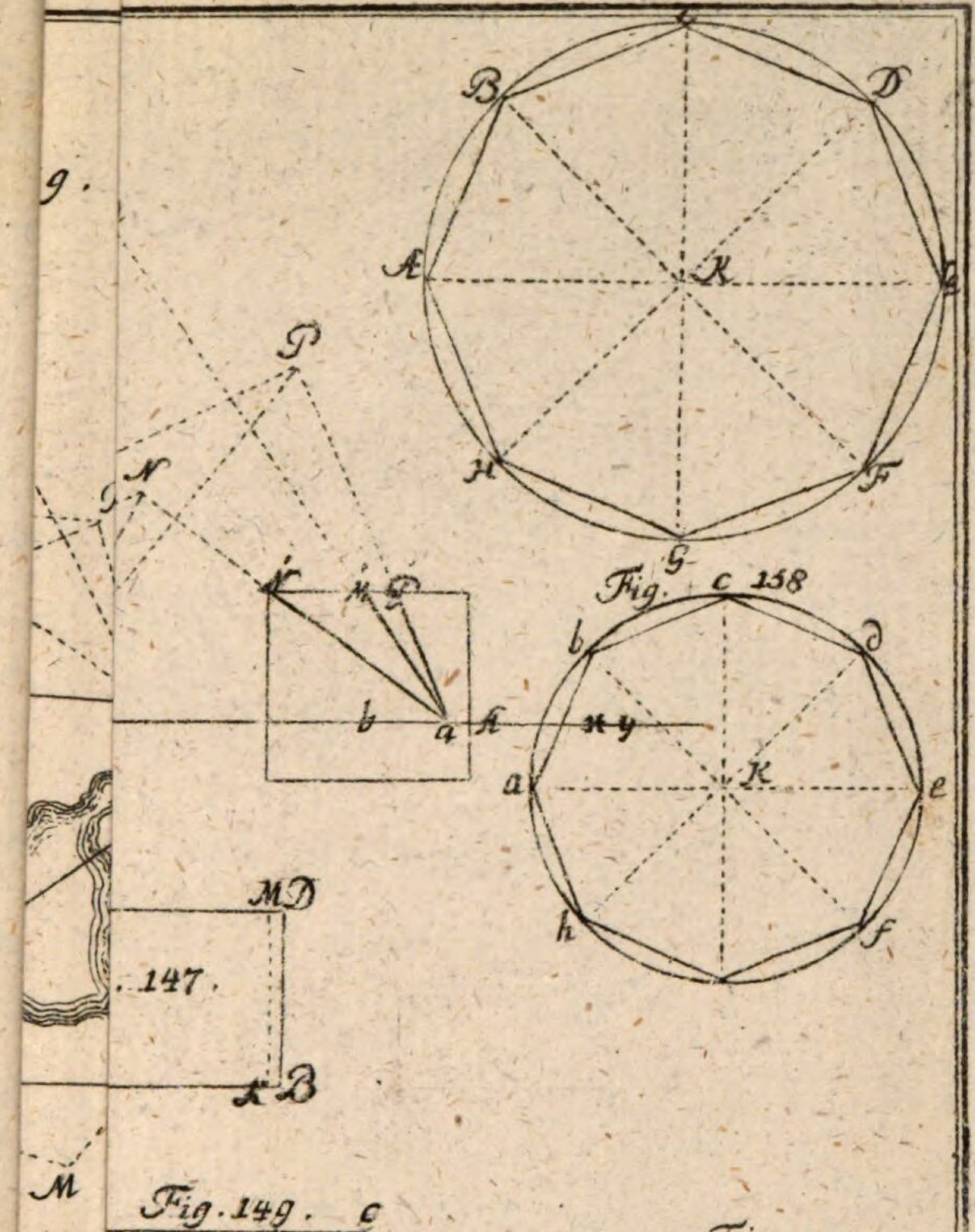


Fig. 158
147.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 153.
Fig. 154.

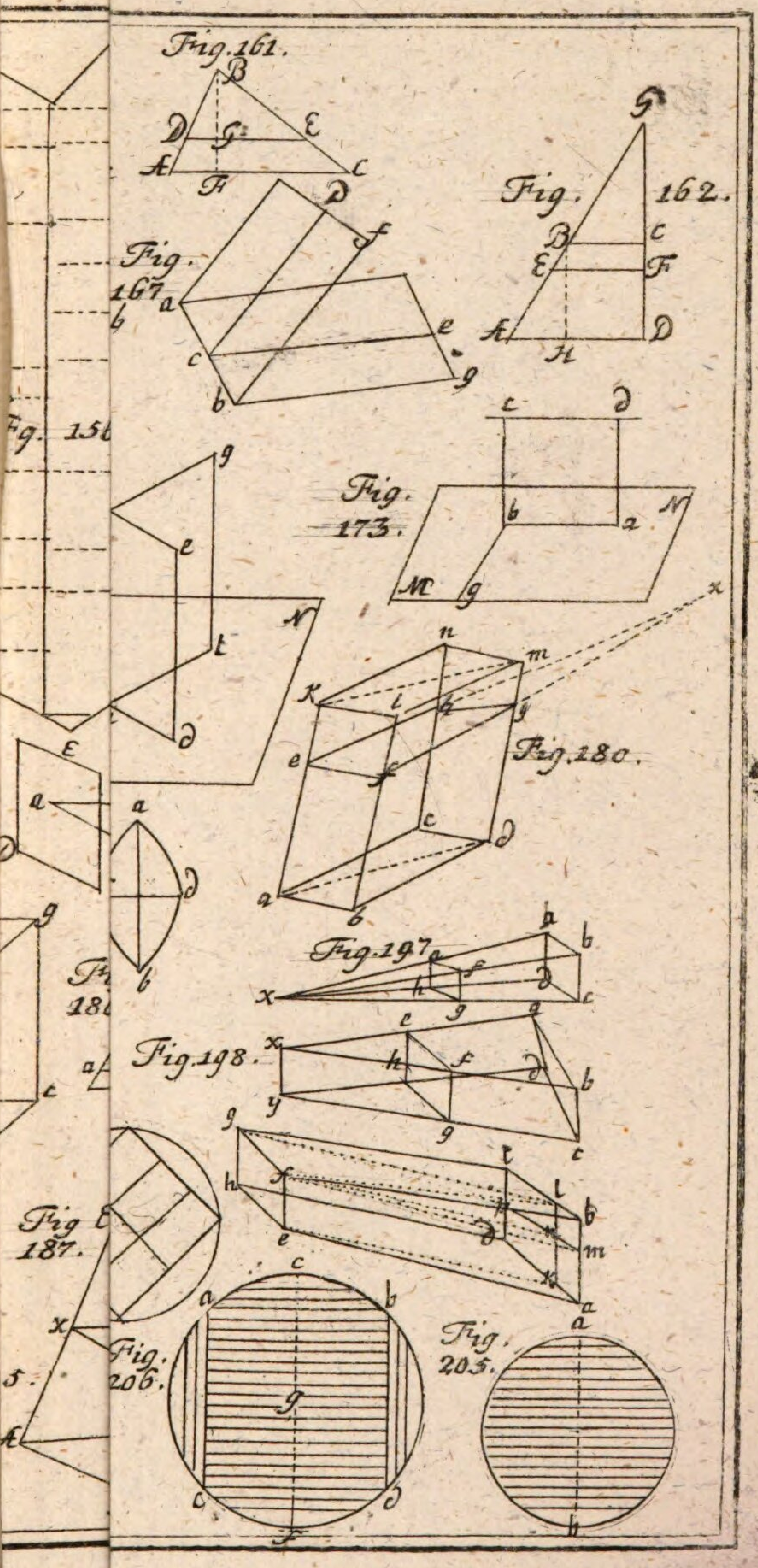


Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 167
Fig. 173.
Fig. 180.
Fig. 197
Fig. 198.
Fig. 187.
Fig. 206.
Fig. 205.

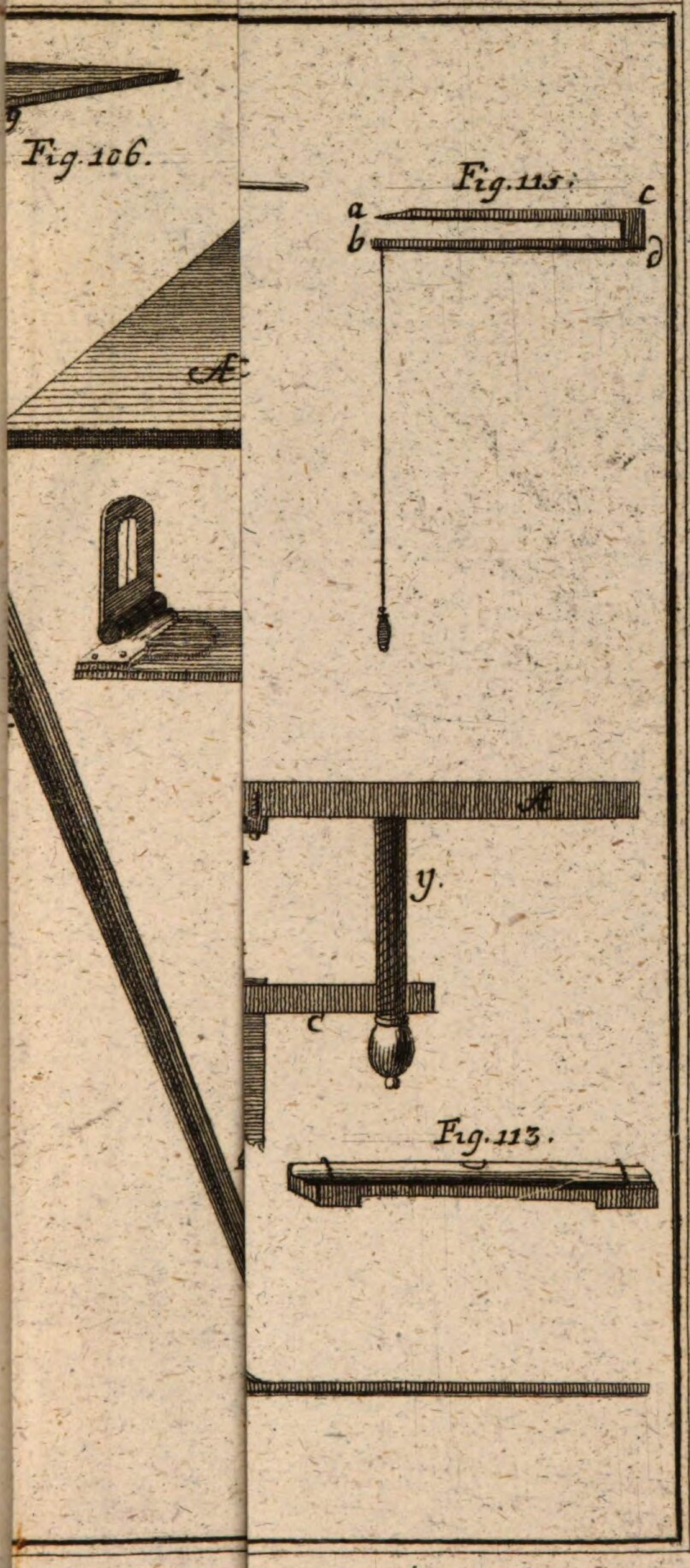


Fig. 106.
A
Fig. 115.
a
b
c
d
A
y.
c
Fig. 113.

F
A
K
III
II
nach Neudorf
I
H
G
x
I
u
II
ach wa
B
K
H
III
80
70

4

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Grünberger, Georg, 1749-1820

Lehrbuch für die pfalzbairischen Förster

Bd.: 1

München 1788

Oecon. 756-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10295575-7
VD18 90382471